INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XVIII. BAND FÜNFTES HEFT 1950

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DMark 16.40

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 25 Bogen vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig**, Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, Hardenbergstraße 34

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Karlsruhe i. Baden, Technische Hochschule

Professor **K. v. Sanden**, Karlsruhe-Land I, Rosmarinstraße 11

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Braunschweig, Harzburger Straße 8a

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24
Fernsprecher 24 40 u. 54 30

Berlin-Charlottenburg 2
Jebensstraße 1
Fernsprecher 32 20 70 u. 32 44 46

Vertriebsvertretungen des Verlages im Ausland:

Schweiz ..... Lange, Maxwell & Springer A.G., Basel, Schützenmattstraße 43
England, USA. und übriges Ausland Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41–45 Neal Street, London, W. C. 2

Inhalt:

Seite

Lieblein†, V., ZufBerechnung der Auftriebscharakteristik eines Profils im Gitterverband. Mit 6 Textabbildungen 281

Klotter, K., Die Analogien zwischen elektrischen und mechanischen Schwingern. Mit 12 Textabbildungen 291

Hain, K., Die zeichnerische Bestimmung der Schleppkurven. Mit 9 Textabbildungen 302

Sänger, E., Luftzumischung zu Abgasstrahlen. Mit 8 Textabbildungen ... 310

Truckenbrodt, E., Ergänzungen zu *F. Riegels:* Das Umströmungsproblem bei inkompressiblen Potentialströmungen. Mit 2 Textabbildungen 324

Riegels, F., Berichtigung zur Arbeit: Das Umströmungsproblem 329

Eschler, H., Zur Ermittlung der Eigenschwingungszahlen der in ihrer Mittelebene belasteten Rechteckplatte 330

Müller, W., Über den Impulssatz für einen in der Flüssigkeit bewegten Körper 338

Jacobs, W., Systematische Sechskomponentenmessungen an Pfeilflügeln. Mit 17 Textabbildungen 344

INGENIEUR-ARCHIV

XVIII. BAND FÜNFTES HEFT 1950

Zur Berechnung der Auftriebscharakteristik eines Profils im Gitterverband[1].

Von V. Lieblein †.

1. Einleitung. Bei der Untersuchung von Profilgittern interessiert die Frage nach der Änderung des Auftriebs beim Übergang vom Einzelprofil zum Gitterprofil. Streckenprofile, sowie Skelettprofile mit kleiner Wölbung und kleinem S-Schlag wurden bereits mehrfach theoretisch untersucht[2], der Einfluß der endlichen Dicke der Profile meines Wissens jedoch nur von *Pistolesi*[3] berücksichtigt. In seiner Arbeit zeigt dieser, daß die Zirkulation Γ um eine Schaufel im Gitterverband nicht nur von der Form des Skeletts, sondern auch von der Dicke des Profils abhängt (Gleichung (65) der zitierten Arbeit). Praktischen Berechnungen ist diese Gleichung aber noch nicht zugänglich; auch haben die von *Pistolesi* verwandten Profile den Hinterkantenwinkel Null. Im folgenden wird unter Zugrundelegung der von *Pistolesi* gegebenen Ansätze der Einfluße der Gitterstellung auf den Auftrieb eines Profils mit endlicher Dicke und einem von Null verschiedenen Hinterkantenwinkel näherungsweise berechnet[4].

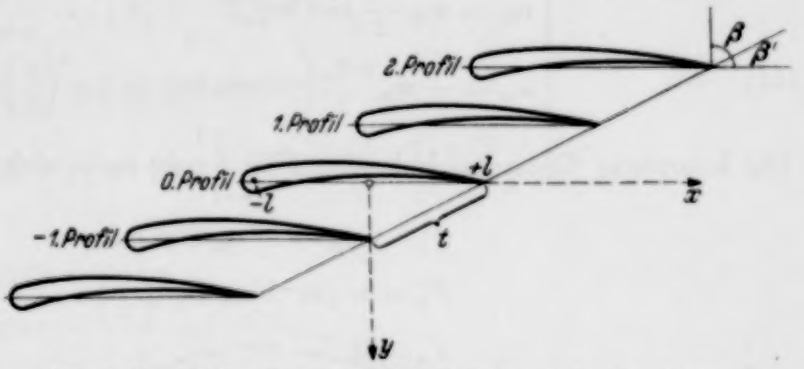


Abb. 1. Gestaffeltes Profilgitter mit Erläuterung der Bezeichnungen.

2. Die Gleichungen für die Zirkulationskoeffizienten. Wie betrachten ein gestaffeltes Profilgitter (Teilung t, Staffelungswinkel[5] β, Länge der Profilsehne $2\,l$), dessen Profile kleine Wölbung, kleine Dicke und einen kleinen Hinterkantenwinkel haben sollen (Abb. 1). Wir denken uns die Profile durch eine komplexe Singularitätenverteilung $\gamma\,(x)$, die wir in erster Näherung auf der Profilsehne anbringen, und die einer in Richtung der $+\,x$-Achse fließenden Strömung mit der Geschwindigkeit w_∞ überlagert wird, erzeugt. Der Realteil von $\gamma(x)$ stelle eine Wirbelverteilung, der Imaginärteil eine Quellenverteilung dar. Die x-Achse unseres Koordinatensystems soll mit der Sehne des nullten Profils zusammenfallen, der Ursprung möge im Mittelpunkt der Sehne dieses Profils liegen. Die positive Richtung der x-Achse weise nach rechts, die der y-Achse senk- recht dazu nach unten. Der Ort der Hinterkante des nullten Profils sei $x=+l$.

Das von der Verteilung $\gamma(x)$ induzierte Geschwindigkeitsfeld auf der x-Achse ist

$$w = -\frac{i e^{i\beta}}{2t} \cdot \int_{-l}^{+l} \gamma(x^*)\, \mathfrak{Ctg}\, \frac{\pi (x - x^*) e^{i\beta}}{t}\, dx^* . \tag{1}$$

---

[1] Der Verfasser wurde am 6. Mai 1945 als Sudetendeutscher bei Unruhen in Prag erschossen. Die Arbeit ist während des Krieges im Anschluß an eine Arbeit von *Pistolesi* entstanden. Eine weitere Arbeit von *Pistolesi* und *Toniolo* (Aerotechnica Bd. 18, 1938), die ganz ähnliche Überlegungen wie die des Verfassers enthält, war ihm offenbar nicht bekannt geworden. Trotzdem schien es der Schriftleitung angebracht, die Arbeit von *Lieblein* zu veröffentlichen, da sie durch eine etwas andere Wahl der Parameter und andere Darstellung sich besser an die in Deutschland üblichen Bezeichnungen und praktischen Bedürfnisse anpaßt und die verwandte italienische Arbeit auch nur schwer zugänglich ist.

[2] *F. Weinig*, Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen. Leipzig 1935; *M. Schilhansl*, Jb. Wiss. Ges. Luftf. 1927, S. 151; *E. Weinel*, Ing.-Arch. 5 (1934), S. 91; *G. Klingemann*, Ing.-Arch. 11 (1940), S. 151; *F. Numachi*, Proc. World Engineering Congr. Tokio 1929 (Tokio 1931).

[3] *E. Pistolesi*, Aerotecnica 17 (1937).

[4] Für die gewissenhafte Durchführung der umfangreichen numerischen Rechnungen möchte ich Frau E. Correll herzlichst danken.

[5] Es ist auch üblich, statt β den Komplementärwinkel $\beta' = \frac{\pi}{2} - \beta$ als Staffelungswinkel zu definieren.

Nach *Pistolesi* führen wir folgende Substitutionen (mit komplexem φ) durch:

$$-\cos\varphi = \frac{\mathfrak{Tg}\left(\frac{\pi x}{t} e^{i\beta}\right)}{\mathfrak{Tg}\left(\frac{\pi l}{t} e^{i\beta}\right)}, \qquad \lambda = \mathfrak{Tg}\left(\frac{\pi l}{t} e^{i\beta}\right) = \mathfrak{Tg}\, r\,. \tag{2}$$

Damit wird aus (1)

$$w = -\frac{i}{2\pi}\int_0^{\pi} \gamma\left(x^*(\varphi^*)\right) \frac{1-\lambda^2\cos\varphi\cos\varphi^*}{\cos\varphi^*-\cos\varphi}\,\frac{\sin\varphi^*}{1-\lambda^2\cos^2\varphi^*}\,d\varphi^*\,. \tag{3}$$

Es ist naheliegend, γ als Funktion des komplexen Winkels φ in eine Reihe (mit komplexen a_i) zu entwickeln, die formal mit der *Birnbaum*schen[1] übereinstimmt:

$$\gamma\left(x(\varphi)\right) = w_\infty\left(a_0 \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + \sum_1^\infty a_n \sin n\varphi\right) = \gamma_0 + \sum_1^\infty \gamma_n\,. \tag{4}$$

Die von den einzelnen γ_n erzeugten Geschwindigkeiten auf der x-Achse erhalten wir bereits mittels (3): es ist

$$\left.\begin{aligned} w_0 &= -w_\infty \frac{i a_0}{2}\,\mathfrak{Cof}\, r\,, \\ w_n &= w_\infty \frac{i a_n}{2}\cos n\varphi \qquad (n \text{ ungerade}), \\ w_n &= -w_\infty \frac{i a_n}{2}\left(-\cos n\varphi + \mathfrak{Tg}^n\left(\frac{r}{2}\right)\right) \qquad (n \text{ gerade}). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die komplexe Gesamtzirkulation $\Gamma = \int_{-l}^{+l} \gamma\, dx$ setzt sich aus den Anteilen

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_0 &= w_\infty t e^{-i\beta} a_0\,\mathfrak{Sin}\, r\,, \\ \Gamma_n &= w_\infty t e^{-i\beta} a_n\,\mathfrak{Tg}^n\left(\frac{r}{2}\right) \qquad (n \text{ ungerade}), \\ \Gamma_n &= 0 \qquad (n \text{ gerade}) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

additiv zusammen. Somit ist

$$\Gamma = w_\infty t e^{-i\beta}\left(a_0\,\mathfrak{Sin}\, r + \sum{}' a_n\,\mathfrak{Tg}^n\left(\frac{r}{2}\right)\right). \tag{7}$$

(Der Strich bedeutet, daß nur über die ungeraden Zeiger summiert wird).

Da die Profile geschlossen sein sollen, muß die Gesamtquellstärke, d. h. der Imaginärteil von Γ Null sein:

$$\mathfrak{Im}\left\{a_0 e^{-i\beta}\,\mathfrak{Sin}\, r + \sum{}' a_n e^{-i\beta}\,\mathfrak{Tg}^n\left(\frac{r}{2}\right)\right\} = 0\,. \tag{8}$$

Bei praktischen Berechnungen werden wir uns wie *Pistolesi* auf die ersten drei Glieder der Reihe (4) beschränken. Die von diesen Gliedern auf der x-Achse induzierten Vertikalgeschwindigkeiten sind

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= \frac{w_\infty}{2}\,\mathfrak{Re}\,\{a_0\,\mathfrak{Cof}\, r\}, \\ v_1 &= -\frac{w_\infty}{2}\,\mathfrak{Re}\,\{a_1\cos\varphi\}, \\ v_2 &= \frac{w_\infty}{2}\,\mathfrak{Re}\left\{-a_2\cos 2\varphi + a_2\,\mathfrak{Tg}^2\left(\frac{r}{2}\right)\right\} \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

und

$$v = v_0 + v_1 + v_2\,.$$

Die Gleichung (8) lautet jetzt

$$\mathfrak{Im}\left\{a_0 e^{-i\beta}\,\mathfrak{Sin}\, r + a_1 e^{-i\beta}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{r}{2}\right\} = 0\,. \tag{8'}$$

Wir stellen den Zusammenhang zwischen den noch unbekannten Koeffizienten a_0, a_1, a_2 (sechs Unbekannte, da die a_n komplex sind) und geeignet gewählten Formparametern des Profils her.

[1] *W. Birnbaum*, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923), S. 290.

Es sei α_N, α_M, α_H die Neigung der Skelett-Tangente in den Punkten $x=-l$, $x=0$, $x=+l$, (Abb. 2) dann folgt aus der kinematischen Randbedingung

$$\left.\begin{aligned}\alpha_N &= \left(\frac{v}{w_\infty}\right)_{x=-l} = \Re\mathfrak{e}\left\{\frac{a_0}{2}\mathfrak{Cof}\, r - \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2}\left(\mathfrak{Tg}^2\left(\frac{r}{2}\right)-1\right)\right\},\\ \alpha_M &= \left(\frac{v}{w_\infty}\right)_{x=0} = \Re\mathfrak{e}\left\{\frac{a_0}{2}\mathfrak{Cof}\, r + 0 + \frac{a_2}{2}\left(\mathfrak{Tg}^2\left(\frac{r}{2}\right)+1\right)\right\},\\ \alpha_H &= \left(\frac{v}{w_\infty}\right)_{x=+l} = \Re\mathfrak{e}\left\{\frac{a_0}{2}\mathfrak{Cof}\, r + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2}\left(\mathfrak{Tg}^2\left(\frac{r}{2}\right)-1\right)\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Durch leichte Rechnungen findet man aus diesen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\alpha_H - \alpha_N &= \Re\mathfrak{e}\{a_1\},\\ \alpha_M - \frac{\alpha_H+\alpha_N}{2} &= \Re\mathfrak{e}\{a_2\},\\ \alpha_M + \frac{\alpha_H+\alpha_N}{2} &= \Re\mathfrak{e}\left\{a_0\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right\} + \Re\mathfrak{e}\left\{a_2\left(\frac{\lambda}{1+\sqrt{1-\lambda^2}}\right)^2\right\},\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

wenn wir wieder $\lambda = \mathfrak{Tg}\, r$ setzen.

Um (8′) zu vereinfachen, machen wir für a_0, a_1, a_2 wie *Pistolesi* folgenden Ansatz:

$$\left.\begin{aligned}a_0 &= (A_0+iB_0)e^{i\beta}\ \frac{1}{\mathfrak{Sin}\, r} = (A_0+iB_0)e^{i\beta}\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda},\\ a_1 &= (A_1+iB_1)e^{i\beta}\ \mathfrak{Ctg}\ \frac{r}{2} = (A_1+iB_1)e^{i\beta}\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda},\\ a_2 &= (A_2+iB_2)e^{i\beta}\ \mathfrak{Ctg}^2\left(\frac{r}{2}\right) = (A_2+iB_2)e^{i\beta}\left(\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right)^2\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Mit diesem Ansatz wird aus (8′)

$$B_0 + B_1 = 0 \tag{12}$$

und aus (7) (bei Beschränkung auf die ersten zwei Glieder)

$$\Gamma = w_\infty t(A_0+A_1). \tag{13}$$

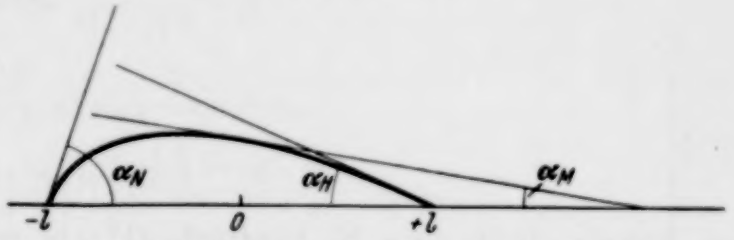


Abb. 2. Formparameter der Skelettlinie eines Profils.

Die Gleichungen (10) lauten jetzt

$$\left.\begin{aligned}A_1\,\Re\mathfrak{e}\left\{e^{i\beta}\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right\} - B_1\,\Im\mathfrak{m}\left\{e^{i\beta}\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right\} &= \alpha_H - \alpha_N,\\ A_2\,\Re\mathfrak{e}\left\{e^{i\beta}\left(\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right)\right\} - B_2\,\Im\mathfrak{m}\left\{e^{i\beta}\left(\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right)^2\right\} &= \alpha_M - \frac{\alpha_H+\alpha_N}{2},\\ A_0\,\Re\mathfrak{e}\left\{e^{i\beta}\frac{1}{\lambda}\right\} - B_0\,\Im\mathfrak{m}\left\{e^{i\beta}\frac{1}{\lambda}\right\} + A_2\cos\beta - B_2\sin\beta &= \alpha_M + \frac{\alpha_H+\alpha_N}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Um die sechs Unbekannten berechnen zu können, müssen wir noch zwei weitere Gleichungen aufstellen, wobei wir die endliche Dicke des Profils berücksichtigen werden. Es gilt in erster Näherung

$$\left(\frac{dy_{ob}}{dx}\right)_{x=x_0} - \left(\frac{dy_{unt}}{dx}\right)_{x=x_0} = \vartheta = \Im\mathfrak{m}\left\{a_0\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi_0}{2} + a_1\sin\varphi_0 + a_2\sin 2\varphi_0\right\}, \tag{15}$$

wobei

$$\varphi_0 = f(x_0) = \arccos\left(-\frac{\mathfrak{Tg}\left(\frac{\pi}{t}\,x\,e^{i\beta}\right)}{\lambda}\right)$$

ist. Als ersten Dickenparameter unseres Profils führen wir die Größe des Winkels ϑ an der Stelle $x=0$ ein:

$$(\vartheta)_{x=0} = \vartheta_0 = \Im\mathfrak{m}\left\{a_0\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4} + a_1\sin\frac{\pi}{2} + a_2\sin\pi\right\} = \Im\mathfrak{m}\{a_0+a_1\}. \tag{16}$$

Dies ist eine fünfte Bestimmungsgleichung für die Unbekannten A_0 bis B_2. Durch Integration der Gleichung (15) können wir noch eine sechste Gleichung gewinnen. Es ist

$$y_{ob} - y_{unt} = \int_{-l}^{x} \vartheta(\xi)\, d\xi \,, \tag{17}$$

und wenn wir die Dicke im Punkte $x = 0$ mit d_0 bezeichnen und als zweiten Dickenparameter einführen, stellt

$$d_0 = \int_{-l}^{0} \vartheta(\xi)\, d\xi \tag{18}$$

eine sechste Gleichung dar.

Wir berechnen das Integral in (18). Es ist mit Berücksichtigung von (15) und der Substitution (2)

$$\frac{d_0}{l} = \Im \mathfrak{m} \left\{ \frac{\lambda}{r} \int_0^{\pi/2} \frac{a_0 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + a_1 \sin\varphi + a_2 \sin 2\varphi}{1 - \lambda^2 \cos^2\varphi} \sin\varphi \, d\varphi \right\} . \tag{19}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$j_n(\lambda) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos n\varphi}{1 - \lambda^2 \cos^2\varphi} \, d\varphi \,, \tag{20}$$

so wird

$$\frac{d_0}{l} = \Im \mathfrak{m} \left\{ \frac{\lambda}{r} \left[a_0 (j_0 + j_1) + \frac{a_1}{2} (j_0 - j_2) + \frac{a_2}{2} (j_1 - j_3) \right] \right\} , \tag{21}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} j_0 &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \,, \\ j_1 &= \frac{1}{\lambda \sqrt{1-\lambda^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \,, \\ j_2 &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \frac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\sqrt{1-\lambda^2}} \,, \\ j_3 &= \left(\frac{4}{\lambda^2} - 3 \right) j_1 - \frac{4}{\lambda^2} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

ist. Führen wir für die a_i die Ausdrücke (11) ein, so nimmt (21) folgende Gestalt an:

$$\left(\frac{d_0}{l}\right)\left(\frac{\pi l}{t}\right) = B_0 \Re \mathfrak{e} \left\{ \frac{1}{\lambda} \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right\} + B_2 \Re \mathfrak{e} \left\{ \frac{2}{\lambda^4} \left(1 + \sqrt{1-\lambda^2}\right)^2 \left(\lambda - \sqrt{1-\lambda^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right) \right\} +$$
$$+ A_0 \Im \mathfrak{m} \left\{ \frac{1}{\lambda} \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right\} + A_2 \Im \mathfrak{m} \left\{ \frac{2}{\lambda^4} \left(1 + \sqrt{1-\lambda^2}\right)^2 \left(\lambda - \sqrt{1-\lambda^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right) \right\} . \tag{23}$$

Gleichung (16) formen wir ebenfalls mit Hilfe von (11) um:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_0 = B_0 \Re \mathfrak{e} \left\{ e^{i\beta} \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} \right\} + B_1 \Re \mathfrak{e} \left\{ e^{i\beta} \frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} \right\} + A_0 \Im \mathfrak{m} \left\{ e^{i\beta} \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} \right\} + \\ + A_1 \Im \mathfrak{m} \left\{ e^{i\beta} \frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} \right\} . \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Aus den sechs Gleichungen (12), (14), (23), (24) können wir die Zirkulationskoeffizienten A_0 bis B_2 berechnen.

3. Berücksichtigung des Hinterkantenwinkels. Wir führen einen von Null verschiedenen Hinterkantenwinkel ein, da bei den bisherigen Ansätzen der Hinterkantenwinkel

$$\vartheta_H = \Im \mathfrak{m} \left\{ a_0 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} + a_1 \sin\pi + a_2 \sin 2\pi \right\} = 0$$

ist. Der Winkel, den die Profiltangenten an Ober- und Unterseite des Profils an der Stelle $x = l$ einschließen, sei $\vartheta_H = -\delta$. (Vorzeichen minus, da der Scheitel rechts liegt.) Wir müssen eine zusätzliche Quellenverteilung überlagern, die an der Stelle $x = l\,(\varphi = \pi)$ den Winkel ϑ_H liefert. Eine solche Verteilung ist der Imaginärteil von

$$\gamma^* = w_\infty \, b^* \cos\varphi \,, \tag{25}$$

wenn $b^* = i\,\delta$ ist. In der Tat ist dann $\vartheta_H = -\delta$. Dabei liefert γ^* keinen Beitrag zur Gesamtzirkulation.

Wir bestimmen das von der Verteilung (25) auf der x-Achse induzierte Geschwindigkeitsfeld. Nach (3) ist

$$\left.\begin{aligned} w^* &= -\frac{i\,b^* w_\infty}{2\pi}\int_0^\pi \frac{1-\lambda^2\cos\varphi\cos\varphi^*}{\cos\varphi^*-\cos\varphi}\,\frac{\sin\varphi^*}{1-\lambda^2\cos^2\varphi^*}\cos\varphi^*\,d\varphi^* = \\ &= \frac{\delta w_\infty}{2\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\sin\varphi^*\cos\varphi^*}{\cos\varphi^*-\cos\varphi}+\frac{\lambda}{2}\frac{\sin\varphi^*\cos\varphi^*}{1-\lambda\cos\varphi^*}-\frac{\lambda}{2}\frac{\sin\varphi^*\cos\varphi^*}{1+\lambda\cos\varphi^*}\right)d\varphi^* \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

und daher

$$w^* = u^* - i\,v^* = \frac{\delta w_\infty}{\pi}\left(1-\cos\varphi\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right|\right)+\frac{\delta\lambda w_\infty}{4\pi}\left(-\frac{4}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2}\ln\left|\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right|\right)$$

oder

$$v^* = -\frac{\delta w_\infty}{\pi}\,\Im\mathfrak{m}\left\{1-\cos\varphi\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right|\right\}-\frac{\delta\lambda w_\infty}{4\pi}\,\Im\mathfrak{m}\left\{-\frac{4}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2}\ln\left|\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right|\right\}. \tag{27}$$

Um die für die Gleichungen (14) nötigen Korrekturen zu gewinnen, bilden wir v^*/w_∞ an den Stellen $\varphi = 0,\ \pi/2,\ \pi$. (Die induzierte Horizontalkomponente wird vernachlässigt.) Es kommt

$$\alpha^* = \left(\frac{v^*}{w_\infty}\right)_{\varphi=0,\,\pi/2,\,\pi} = -\frac{\delta}{2\pi}\,\Im\mathfrak{m}\left\{\frac{1}{\lambda}\ln\left|\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right|\right\} = -\frac{\delta\,l}{t}\,\Im\mathfrak{m}\left\{e^{i\beta}\,\frac{1}{\lambda}\right\}. \tag{28}$$

d. h. α_M, α_N, α_H erhalten infolge von (25) den konstanten Zuwachs α^*.

4. Berechnung der Zirkulationskoeffizienten. Zur Berechnung der Zirkulationskoeffizienten liegt folgendes System vor:

$$\left.\begin{aligned} &B_0 + B_1 = 0\,, \\ &A_1\,\Re\mathfrak{e}\left\{e^{i\beta}\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right\} - B_1\,\Im\mathfrak{m}\left\{e^{i\beta}\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right\} = \alpha_H - \alpha_N = \alpha_2\,, \\ &A_2\,\Re\mathfrak{e}\left\{e^{i\beta}\left(\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right)^2\right\} - B_2\,\Im\mathfrak{m}\left\{e^{i\beta}\left(\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right)^2\right\} = \alpha_M - \frac{\alpha_H+\alpha_N}{2} = \alpha_3\,, \\ &A_0\,\Re\mathfrak{e}\left\{e^{i\beta}\,\frac{1}{\lambda}\right\} - B_0\,\Im\mathfrak{m}\left\{e^{i\beta}\,\frac{1}{\lambda}\right\} + A_2\cos\beta - B_2\sin\beta = \alpha_M + \frac{\alpha_H+\alpha_N}{2} + 2\,\alpha^* = \alpha_1 + 2\,\alpha^*\,, \\ &B_0\,\Re\mathfrak{e}\left\{\frac{1}{\lambda}\,\operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right\} + B_2\,\Re\mathfrak{e}\left\{\frac{2}{\lambda^4}\left(1+\sqrt{1-\lambda^2}\right)^2\left(\lambda-\sqrt{1-\lambda^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right)\right\} + \\ &\quad + A_0\,\Im\mathfrak{m}\left\{\frac{1}{\lambda}\operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right\} + A_2\,\Im\mathfrak{m}\left\{\frac{2}{\lambda^4}\left(1+\sqrt{1-\lambda^2}\right)^2\left(\lambda-\sqrt{1-\lambda^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right)\right\} = \\ &\quad = \left(\frac{d_0}{l}\right)\left(\frac{\pi\,l}{t}\right), \\ &B_0\,\Re\mathfrak{e}\left\{e^{i\beta}\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right\} + B_1\,\Re\mathfrak{e}\left\{e^{i\beta}\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right\} + \\ &\quad + A_0\,\Im\mathfrak{m}\left\{e^{i\beta}\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right\} + A_1\,\Im\mathfrak{m}\left\{e^{i\beta}\,\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right\} = \vartheta_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Es erscheint zunächst am einfachsten, $B_0 = B_1 = B_2 = 0$ zu setzen. Dann ist die erste Gleichung (29) befriedigt, die Zahl der Unbekannten erniedrigt sich auf drei, und wir haben zu Berechnung der Koeffizienten A_0, A_1, A_2 das System

$$\left.\begin{aligned} &A_0\,\Re\mathfrak{e}\left\{e^{i\beta}\,\frac{1}{\lambda}\right\} + A_2\cos\beta = \alpha_1 + 2\,\alpha^*\,, \\ &A_1\,\Re\mathfrak{e}\left\{e^{i\beta}\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right\} = \alpha_2\,. \\ &A_2\,\Re\mathfrak{e}\left\{e^{i\beta}\left(\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right)^2\right\} = \alpha_3\,. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Man sieht leicht, daß α_1 ein Maß für die Größe des Anstellwinkels, α_2 ein Maß für die Wölbung, α_3 ein Maß für den S-Schlag darstellt. Durch das Nullsetzen der B_n wird den Profilen ein bestimmter Winkel ϑ_0 und eine bestimmte Dicke d_0 vorgeschrieben, die Funktionen von $\pi l/t$ und β sind. Um über die Dickenparameter frei verfügen zu können, müssen wir B_0 und B_1 von Null verschieden voraussetzen. Wir beschränken uns zunächst auf Profile mit symmetrischer Wölbungsverteilung, indem wir $A_2 = B_2 = 0$ setzen. Zur Berechnung der Unbekannten A_0, B_0, A_1, B_1 dienen dann folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &A_0\,\Re\mathrm{e}\left\{e^{i\beta}\frac{1}{\lambda}\right\} - B_0\,\Im\mathrm{m}\left\{e^{i\beta}\frac{1}{\lambda}\right\} = \alpha_1 + 2\,\alpha^*\,,\\ &A_1\,\Re\mathrm{e}\left\{e^{i\beta}\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right\} + B_0\,\Im\mathrm{m}\left\{e^{i\beta}\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right\} = \alpha_2\\ &A_0\,\Im\mathrm{m}\left\{\frac{1}{\lambda}\operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right\} + B_0\,\Re\mathrm{e}\left\{\frac{1}{\lambda}\operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right\} = \left(\frac{d_0}{l}\right)\left(\frac{\pi l}{t}\right). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} &e^{i\beta}\frac{1}{\lambda} = p + iq\,,\\ &e^{i\beta}\frac{1}{\lambda}\left(1+\sqrt{1-\lambda^2}\right) = p_1 + iq_1\,.\\ &\frac{1}{\lambda}\operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} = r + is\,. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Dann wird aus (31)

$$\left.\begin{aligned} &A_0\,p - B_0 q = \alpha_1 + 2\,\alpha^*\,.\\ &B_0\,q_1 + A_1 p_1 = \alpha_2\,.\\ &A_0 s + B_0 r = \left(\frac{d_0}{l}\right)\left(\frac{\pi l}{t}\right). \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Aus diesen Gleichungen berechnen wir A_0, A_1. Es ist

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= -\frac{1}{D}\left(p_1 r\,\alpha_1 + 2\,p_1 r\alpha^* + q\,p_1\frac{d_0}{l}\frac{\pi l}{t}\right).\\ A_1 &= -\frac{1}{D}\left[q_1 s\,\alpha_1 + q_1 s\,2\,\alpha^* + (pr+qs)\,\alpha_2 - pq_1\frac{d_0}{l}\frac{\pi l}{t}\right].\\ D &= -p_1\,(rp+sq) \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

und gemäß (13)

$$\Gamma = -w_\infty\,t\,\frac{1}{D}\left[(p_1 r + q_1 s)\,\alpha_1 + (p_1 r + q_1 s)\,2\,\alpha^* + (pr+qs)\,\alpha_2 + (qp_1 - pq_1)\frac{d_0}{l}\frac{\pi l}{t}\right]. \tag{35}$$

Im Hinblick auf die weiteren Rechnungen schreiben wir (35) in der Form

$$\Gamma = w_\infty\,t\left[k_1'\,(\alpha_1 + 2\,\alpha^*) + k_2'\,\alpha_2 + k_3'\frac{d_0}{l}\right] \tag{36}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} k_1' &= \frac{p_1 r + q_1 s}{p_1(rp+sq)}\,.\\ k_2' &= \frac{1}{p_1}\,,\\ k_3' &= \frac{\pi l}{t}\cdot\frac{qp_1 - pq_1}{p_1(rp+sq)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Mit (28) geht (36) über in

$$\Gamma = w_\infty\,\pi\,l\left(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\frac{d_0}{l} + k_4\frac{2\delta}{\pi}\right), \tag{38}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} &\frac{t}{\pi l}\,k_n' = k_n \quad (n = 1, 2, 3)\,,\\ &-q\;k_1' = k_4 \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

gesetzt ist.

5. Vergleich der Auftriebsbeiwerte des Einzelprofils und Gitterprofils. Führen wir den Grenzübergang $t \to \infty$ d. h. den Übergang zum Einzelflügel durch, so wird, wie man leicht einsieht,

$$k_1 = 1,\ k_2 = 1/2,\ k_3 = k_4 = 0$$

und

$$\Gamma = \Gamma^{(e)} = w_\infty \pi l \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right) = 2\, w_\infty \pi l \left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4}\right). \tag{40}$$

Der Winkel α_2 hängt mit dem Wölbungsparameter unserer Profile zusammen: Es ist

$$\frac{\alpha_2}{4} = \frac{f}{l}, \tag{41}$$

wobei f die Pfeilhöhe des Skeletts bedeutet. Somit lautet die Formel für die Zirkulation um eine Schaufel im Gitterverband

$$\Gamma^{(g)} = 2 w_\infty \pi l \left(k_1 \frac{\alpha_1}{2} + k_2 \frac{2f}{l} + k_3 \frac{d_0}{2l} + k_4 \frac{\delta}{\pi}\right). \tag{42}$$

Aus (40) und (42) ergibt sich für den Auftriebsbeiwert des Einzelprofils und für den Auftriebsbeiwert desselben Profils im Gitterverband bei gleichem Anstellwinkel

$$C_a^{(e)} = 2\pi \left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{f}{l}\right), \tag{43a}$$

$$C_a^{(g)} = 2\pi \left(k_1 \frac{\alpha_1}{2} + 2 k_2 \frac{f}{l} + \frac{k_3}{2} \frac{d_0}{l} + \frac{k_4}{\pi} \delta\right). \tag{43b}$$

Wir setzen (43a) in (43b) ein und erhalten nach einigen Umformungen

$$C_a^{(g)} = k\, C_a^{(e)} + 2\pi \left(k_W \frac{f}{l} + k_D \frac{d_0}{l} + k_H \delta\right) \tag{44}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} k &= k_1, & k_D &= \frac{k_3}{2}, \\ k_W &= 2k_2 - k_1, & k_H &= \frac{k_4}{\pi}. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

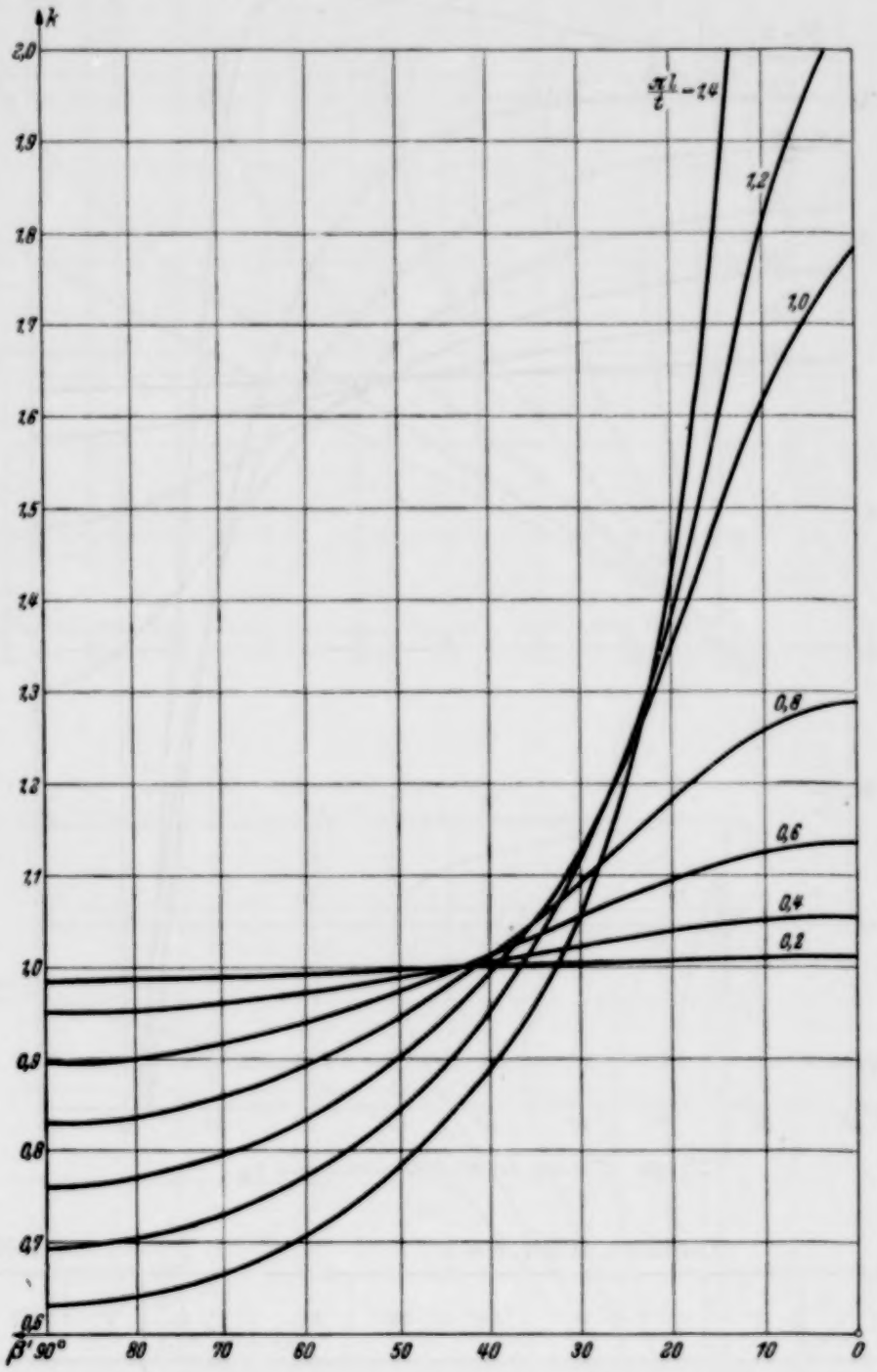


Abb. 3. Werte des Einflußkoeffizienten k in Abhängigkeit von Staffelungswinkel β' mit $\pi \frac{l}{t}$ als Parameter.

Aus der Formel (44) ersieht man, daß sich der Einfluß der Gitterstellung in einer Änderung von $dC_a/d\alpha$ äußert, die durch k dargestellt wird, und in einer Drehung der Nullauftriebsrichtung, dargestellt durch

$$\Delta_0 = +\lambda_W \frac{f}{l} + \lambda_D \vartheta_0 + \lambda_H \delta \tag{46}$$

mit

$$\lambda_W = -\frac{k_W}{k}, \qquad \lambda_D = -\frac{k_D}{k}, \qquad \lambda_H = -\frac{k_H}{k}. \tag{47}$$

Es ist bemerkenswert, daß zum Unterschied von der Theorie des Einzelflügels der Dickenparameter bereits bei einer Theorie erster Ordnung in die Formel für den Auftriebsbeiwert eingeht.

Die Werte der Einflußkoeffizienten k, k_W, k_D, k_H sind in den Tabellen 1 bis 4 angegeben. Die Abb. 3 bis 6 zeigen ihren Verlauf in Abhängigkeit von $\beta' = \pi/2 - \beta$ mit $\pi l/t$ als Parameter.

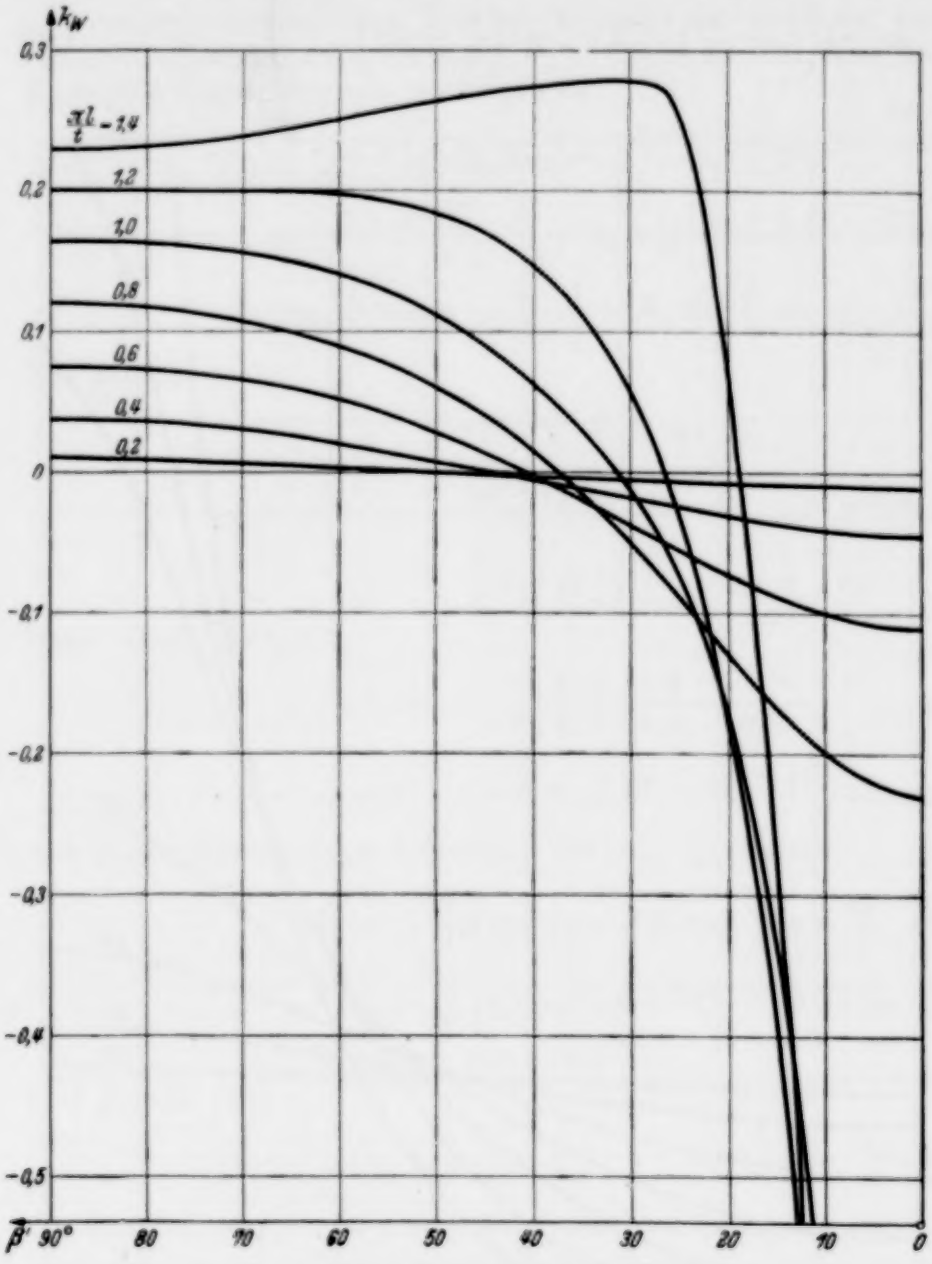


Abb. 4. Werte des Einflußkoeffizienten k_W.

Die Koeffizienten k und k_W sind bereits von *Weinig* und *Schilhansl* mit Hilfe der konformen Abbildung bzw. der Singularitätenmethode berechnet worden. Der *Schilhansl*sche Einflußkoeffizient ist eine Linearkombination aus k und k_W. Wie man aus den Zahlentafeln und Diagrammen ersieht, können k_W und k_H einen in seiner Größenordnung nicht mehr zu vernachlässigenden Einfluß auf die Größe des Auftriebs haben.

6. Berücksichtigung des S-Schlags. Um den S-Schlag zu berücksichtigen, müssen wir das vollständige System (29) lösen. Um die dabei auftretenden mühsamen und zeitraubenden Rechnungen zu vermeiden, machen wir für A_2 und B_2 den naheliegenden Näherungsansatz

$$A_2 = \lambda \sin\beta, \qquad B_2 = \lambda \cos\beta .$$

Setzen wir noch

$$\left.\begin{aligned} & e^{i\beta}\left(\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right)^2 = p_2 + i\,q_2 \\ & \frac{2}{\lambda^4}\left(1+\sqrt{1-\lambda_2}\right)^2 \\ & \left(\lambda - \sqrt{1-\lambda_2}\,\operatorname{arc\,tg}\,\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right) \\ & \quad = r_1 + i\,s_1 , \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Tabelle 1. *Werte von k.*

$\frac{\pi l}{t}$ \ β	0°	20°	40°	60°	80°	90°
0,0	1	1	1	1	1	1
0,2	0,987	0,990	0,998	1,007	1,013	1,013
0,4	0,950	0,960	0,989	1,026	1,053	1,057
0,6	0,895	0,915	0,974	1,056	1,129	1,140
0,7	0,864	0,887	0,959	1,073	1,189	1,203
0,8	0,830	0,857	0,944	1,094	1,259	1,287
0,9	0,796	0,825	0,923	1,111	1,349	1,401
1,0	0,762	0,794	0,900	1,121	1,469	1,558
1,1	0,728	0,761	0,874	1,125	1,625	1,786
1,2	0,695	0,729	0,846	1,116	1,820	2,141
1,3	0,663	0,697	0,816	1,091	2,053	2,770
1,4	0,633	0,666	0,782	1,055	2,174	4,149

Tabelle 2. *Werte von k_W.*

$\frac{\pi l}{t}$ \ β	0°	20°	40°	6 0°	80°	90°
0,0	0	0	0	0	0	0
0,2	0,010	0,007	0,001	—0,004	—0,009	—0,010
0,4	0,037	0,030	0,010	—0,017	—0,041	—0,044
0,6	0,075	0,065	0,029	—0,036	—0,099	—0,109
0,7	0,097	0,086	0,044	—0,045	—0,143	—0,160
0,8	0,120	0,108	0,061	—0,049	—0,199	—0,229
0,9	0,142	0,128	0,085	—0,041	—0,266	—0,325
1,0	0,163	0,156	0,113	—0,015	—0,354	—0,464
1,1	0,182	0,177	0,146	0,008	—0,475	—0,670
1,2	0,200	0,200	0,186	0,055	—0,632	—1,002
1,3	0,216	0,221	0,227	0,127	—0,780	—1,598
1,4	0,231	0,240	0,264	0,279	—0,748	—2,946

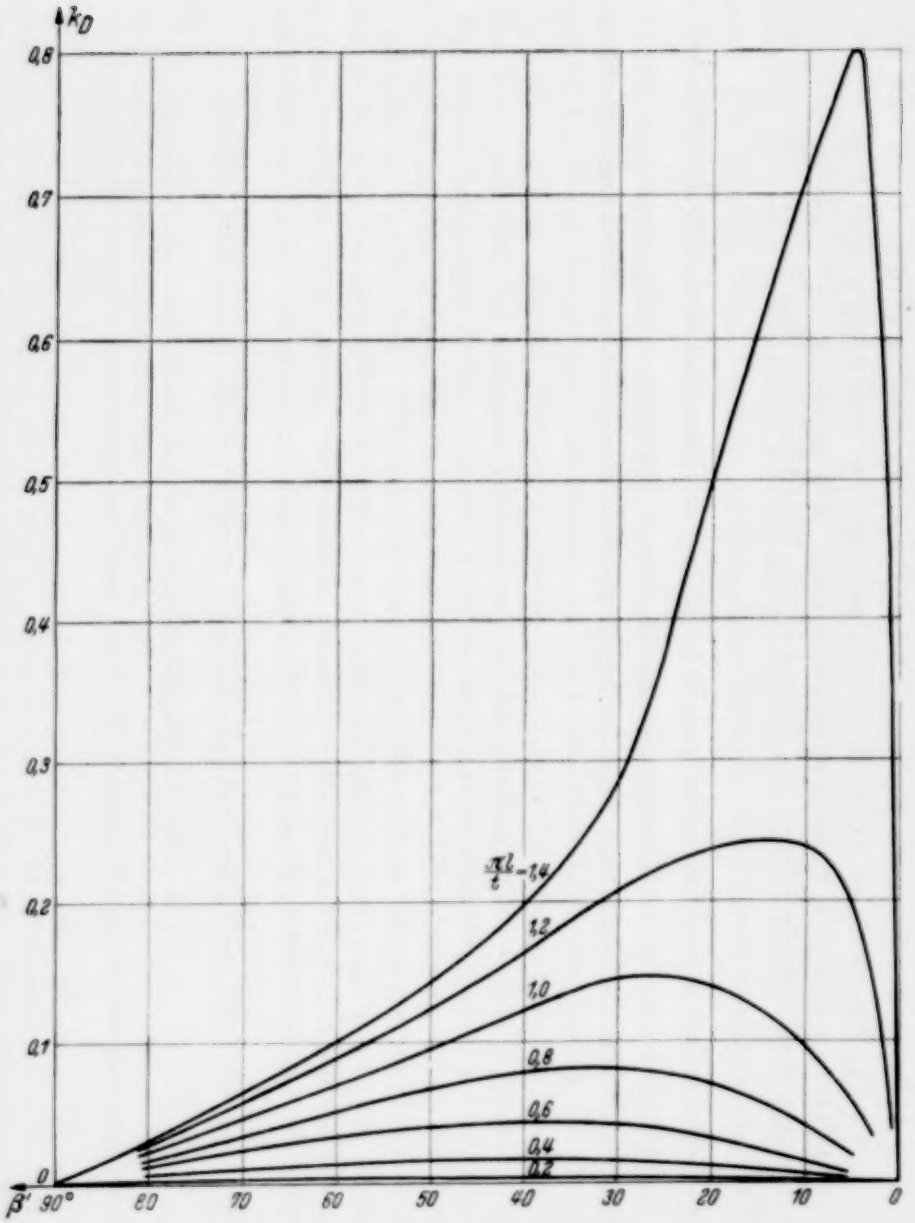


Abb. 5. Werte des Einflußkoeffizienten k_D.

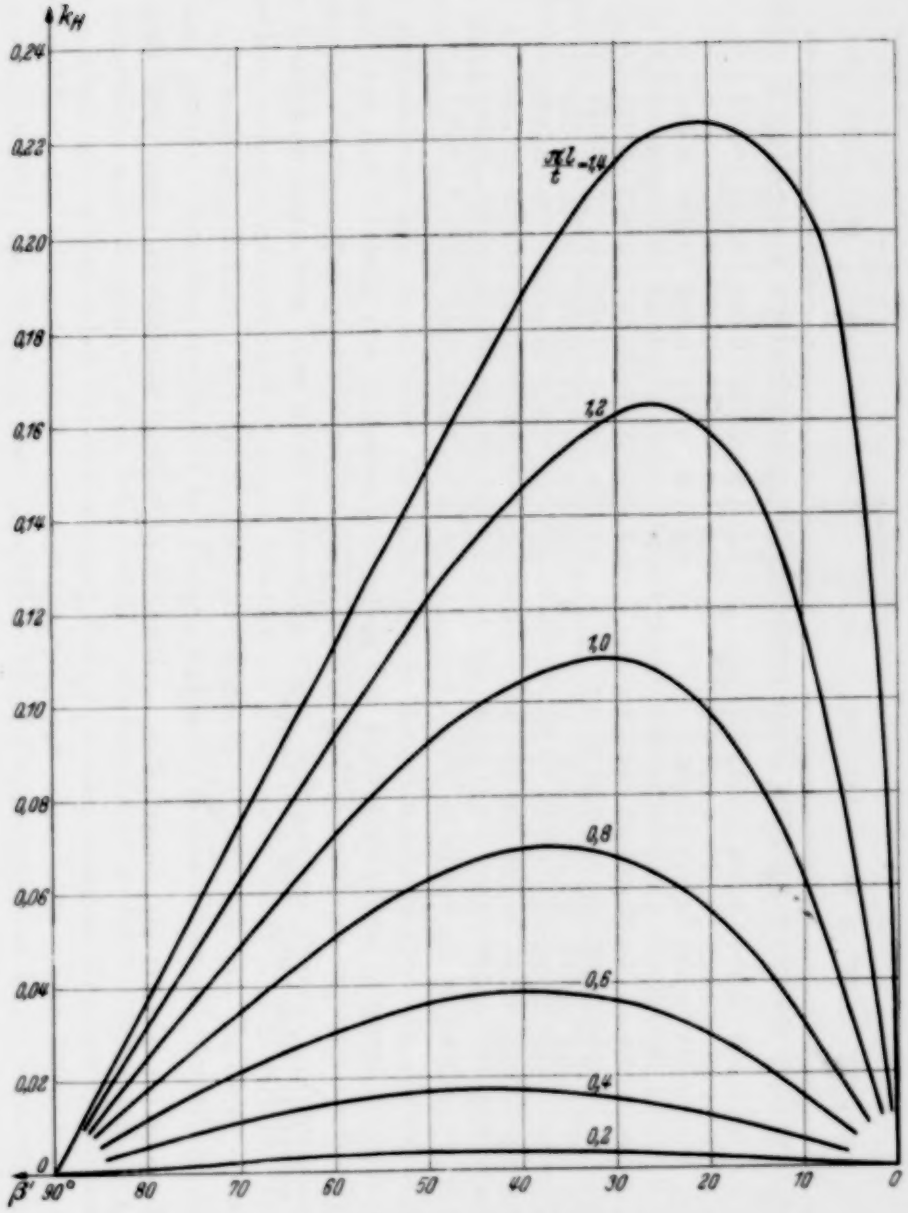


Abb. 6. Werte des Einflußkoeffizienten k_H.

Tabelle 3. *Werte von k_D.*

$\frac{\pi l}{t}$ \ β	0°	20°	40°	60°	80°	90°
0,0	0	0	0	0	0	0
0.2	0	0.003	0.004	0.004	0.002	0
0.4	0	0.010	0.019	0.017	0.007	0
0.6	0	0.023	0.042	0.044	0.020	0
0.7	0	0.029	0.055	0.062	0.029	0
0.8	0	0.034	0.068	0.085	0.044	0
0.9	0	0.039	0.082	0.114	0.067	0
1.0	0	0.044	0.095	0.144	0.100	0
1.1	0	0.049	0.108	0.176	0.172	0
1.2	0	0.054	0.121	0.210	0.242	0
1.3	0	0.058	0.130	0.241	0.312	0
1.4	0	0.061	0.137	0.276	0.729	0

Tabelle 4. *Werte von k_H.*

$\frac{\pi l}{t}$ \ β	0°	20°	40°	60°	80°	90°
0.0	0	0	0	0	0	0
0.2	0	0.003	0.004	0.004	0.001	0
0.4	0	0.011	0.017	0.015	0.006	0
0.6	0	0.022	0.036	0.036	0.016	0
0.7	0	0.028	0.049	0.050	0.023	0
0.8	0	0.035	0.062	0.067	0.031	0
0.9	0	0.042	0.076	0.087	0.045	0
1.0	0	0.049	0.092	0.110	0.062	0
1.1	0	0.056	0.108	0.135	0.085	0
1.2	0	0.062	0.122	0.162	0.116	0
1.3	0	0.068	0.136	0.188	0.162	0
1.4	0	0.074	0.149	0.214	0.207	0

so wird

$$\lambda = \frac{\alpha_3}{p_2 \sin\beta - q_2 \cos\beta},$$

und die vorletzte Gleichung von (29) lautet

$$B_0 r + A_0 s + \frac{s_1 \operatorname{tg}\beta + r_1}{p_2 \operatorname{tg}\beta - q_2}\,\alpha_3 = \left(\frac{d_0}{l}\right)\left(\frac{\pi l}{t}\right).$$

In der Formel für I tritt als Zusatzglied, welches den Einfluß der Gitterstellung auf den S-Schlag darstellt,

$$k_3 \frac{s_1 \operatorname{tg}\beta + r_1}{p_2 \operatorname{tg}\beta - q_2}\,\alpha_3 .$$

auf.

7. Zusammenfassung. Der Auftrieb eines gewölbten, dicken Profils mit von Null verschiedenem Hinterkantenwinkel in Gitterstellung wird mit Hilfe der Singularitätenmethode berechnet und mit dem Auftrieb des Einzelprofils verglichen. Der Gittereinfluß wird in Form von Koeffizienten dargestellt, die, von den speziellen Profilparametern unabhängig, nur Funktionen des Teilungsverhältnisses und des Staffelungswinkels sind. Ein grundlegender Unterschied gegenüber der Theorie des Einzelprofils ist das Eingehen der Profildicke in eine lineare Theorie, wiesie hier vorliegt.

Aus dem früheren Institut für Motorenforschung der Luftfahrtforschungsanstalt Braunschweig-Völkenrode

(Eingegangen am 19. August 1949.)

Anschrift an Stelle des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *E. Schmidt*, Braunschweig, Harzburger Straße 8a.

Die Analogien zwischen elektrischen und mechanischen Schwingern.

Von K. Klotter.

1. Einleitung. Von Analogien oder „Gleichnissen" macht man in der Physik gerne Gebrauch. Oft werden zwei physikalische Vorgänge, selbst wenn sie sich in durchaus verschiedenen Gebieten abspielen, dennoch durch dieselben Gleichungen oder Differentialgleichungen beschrieben. Sie verlaufen dann „analog". Man kann demnach an einem zweiten Vorgang studieren, was man von einem ersten zu erfahren wünscht. Besonders nützlich werden solche Analogien, wenn auf einem der Gebiete eine einfache Versuchstechnik besteht. Nun ist die elektrische Versuchstechnik im allgemeinen wesentlich bequemer als die mechanische. Daher rührt die Beliebtheit z. B. der mechanisch-elektrischen Analogien. Es sei in diesem Zusammenhang etwa an die experimentelle Ermittlung der Lösung von Randwertaufgaben der Potentialtheorie erinnert, wo oft das mechanische Problem auf ein elektrisches „abgebildet" und dieses dann experimentell gelöst wird. Die Analogien brauchen aber nicht notwendig einen elektrischen Partner aufzuweisen. Auch zwischen rein mechanischen Vorgängen können sie hergestellt werden. Ein Beispiel bietet das sog. „Seifenhautgleichnis", auf das *L. Prandtl*[1] aufmerksam gemacht hat. Es dient ebenfalls zur Lösung gewisser Randwertprobleme der Potentialtheorie, insbesondere der Verteilung der Spannungen über den Querschnitt tordierter Stäbe.

Besonders weit ausgebaut sind, wie erwähnt, die mechanisch-elektrischen Analogien. Ihnen gelten auch die vorliegenden Betrachtungen. Sie sollen aber nicht an die oben erwähnten Randwertprobleme der Potentialtheorie anschließen, wo es sich um kontinuierliche Gebilde oder, anders ausgedrückt, um Systeme von unendlich vielen Freiheitsgraden handelt (deren Vorgänge durch partielle Differentialgleichungen beschrieben werden); wir wollen uns vielmehr mit jenen Analogien befassen, die zwischen mechanischen und elektrischen Systemen von einem oder von mehreren, aber endlich vielen, Freiheitsgraden bestehen.

Solche Analogien sind bisher untersucht worden von *W. Hähnle*[2] und *F. A. Firestone*[3]. An jenen Stellen fehlt jedoch noch eine deutliche Abgrenzung des Bereichs, innerhalb dessen die gewünschten Analogien aufgestellt werden können; wir werden diese Abgrenzung hier angeben. Überdies haben die entscheidenden Vorteile der von Firestone angegebenen Zuordnung noch keineswegs die ihnen gebührende Beachtung gefunden, wie neuere Veröffentlichungen[4] erkennen lassen. Wir werden diese Vorteile, in geeigneter Schreib- und Bezeichnungsweise, deutlich zu machen versuchen[5].

2. Die Abgrenzung der Analogien. Auf der elektrischen Seite werden die Gebilde von endlich vielen Freiheitsgraden dargestellt durch (unverzweigte oder verzweigte) Stromkreise, oder anders ausgedrückt, durch Netzwerke (Schaltungen). Wir betrachten dabei nur die sog. „ebenen" Netzwerke, d. s. solche, die sich in einer Ebene ohne Überschneidungen darstellen lassen. Wir stellen uns zunächst die Aufgabe anzugeben, welche mechanischen Gebilde ihnen entsprechen.

Ein erstes Kriterium dafür, daß zwei Gebilde analog heißen sollen, gaben wir oben schon an: Die Vorgänge in beiden Gebilden werden durch dieselben Gleichungen oder Differentialgleichungen beschrieben. Würden wir nur dieses Kriterium allein verwenden, so wäre die Mannigfaltigkeit der möglichen Zuordnungen außerordentlich groß und damit die Übereinstimmung im einzelnen recht gering. Wir fordern deshalb weiterhin noch, daß auch die Elemente des einen Gebildes (bei der elektrischen Schaltung z. B. die Spulen, Kondensatoren und Widerstände,

---

[1] *L. Prandtl*, Jber. Dtsch. Math.-Vereinig. 13 (1904), S. 31; s. auch Hdb. Phys. Bd. 6, S. 146. Berlin 1928.

[2] *W. Hähnle*, Wiss. Veröffentl. aus dem Siemens-Konzern (1931), S. 1.

[3] *F. A. Firestone*, J. Acoust. Soc. (1933), S. 249.

[4] Vgl. etwa das sonst so ausgezeichnete Werk von *K. W. Wagner*, Die Lehre von den Schwingungen und Wellen. Wiesbaden 1947.

[5] Zusatz bei der Korrektur: In den amerikanischen Lehrbüchern über dieses Gebiet wird der Firestoneschen Zuordnung durchaus der Vorzug gegeben; siehe z. B. *M. F. Gardner* u. *J. L. Barnes*, Transients in Linear Systems, New York 1942, insbes. Kap. II, S. 19···92. Aber auch hier fehlt die Abgrenzung der Möglichkeiten für die Zuordnung unter den in Ziff. 2 angegebenen Bedingungen.

die Spannungs- und Stromquellen) einzeln den Elementen des zweiten Gebildes entsprechen. Durch diese Forderung werden die Gebilde der Mechanik, die elektrischen Schaltungen entsprechen können, weitgehend beschränkt: Es kommen nur mehr die sog. Ketten in Betracht.

Dazu ein kurzes Wort der Erläuterung: Die mechanischen Gebilde von endlich vielen Freiheitsgraden lassen sich in drei Klassen einteilen:

1. den einfachen Schwinger und seine Verbände, die Ketten,
2. den Punktkörper und seine Verbände in der Ebene oder im Raum,
3. den starren Körper und seine Verbände in der Ebene oder im Raum.

Ein einfacher Schwinger (ein System von einem Freiheitsgrad) besteht aus drei Elementen: einem Punktkörper (Masse), der gezwungen ist, sich auf einer Linie zu bewegen, einer Feder und gegebenenfalls einem Dämpfer. An die Stelle des Punktkörpers kann auch ein starrer Körper treten, der sich nur um eine feste Achse drehen kann. An die Stelle der ihre Rückstellkräfte aus elastischen Gebilden (Federn) schöpfenden Schwinger können auch die quasielastischen Schwinger (etwa die Pendel) treten. Eine Kette ist ein Verband solcher einfacher Schwinger; sie baut sich aus denselben Elementen (Massen, Federn, Dämpfern) auf wie der einfache Schwinger.

Zu den mechanischen Schwingern der Klassen 2 und 3, dem in der Ebene oder im Raum beweglichen Punktkörper und seinen Verbänden oder dem starren Körper und seinen Verbänden, gibt es — falls man die Forderung stellt, daß auch die Elemente der Gebilde sich entsprechen sollen — keine analoge elektrische Schaltung. Im Verlauf unserer Betrachtungen werden wir aber erfahren, daß den Analogien noch engere als die bisher angegebenen Grenzen gezogen sind, und zwar derart, daß sich zwar zu jeder elastischen Kette eine elektrische Schaltung finden läßt, keineswegs aber zu jeder elektrischen Schaltung eine mechanische elastische Kette.

3. Die Zuordnung der Elemente. Die elektrischen Schaltungen enthalten als Elemente Spulen (Induktivitäten L), Kondensatoren (Kapazitäten C) und *Ohm*sche Widerstände (Widerstände R) mit Spannungsquellen (u_0) oder Stromquellen (i_0). Fließt durch die genannten Schaltelemente ein Strom i, so tritt im Element ein Spannungsabfall u auf, für den der Reihe nach gilt

$$\left.\begin{aligned} &\text{Spule:} && u = L\,\frac{di}{dt}\,, \\ &\text{Widerstand:} && u = R\,i\,, \\ &\text{Kondensator:} && u = \frac{1}{C}\int i\,dt\,. \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

Liegt umgekehrt an einem der drei Elemente eine Spannung u, so fließt in ihm ein Strom i, für den gilt:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Spule:} && i = \frac{1}{L}\int u\,dt\,, \\ &\text{Widerstand:} && i = \frac{1}{R}\,u\,, \\ &\text{Kondensator:} && i = C\,\frac{du}{dt}\,. \end{aligned}\right\} \tag{1b}$$

Die Gebilde auf der mechanischen Seite, die elastischen Ketten, enthalten als Elemente Federn (Federnachgiebigkeit $h = 1/c$ mit $[h] = LK^{-1}$, gemessen etwa in cm/kg), Dämpfer (Dämpfernachgiebigkeit $d = 1/b$ mit $[d] = LT^{-1}K^{-1}$, gemessen etwa in $\mathrm{cmsec^{-1}/kg}$) und Punktkörper (Massen m mit $[m] = K/LT^{-2}$).

In der Mechanik ist es üblich, als Koordinaten, die einen Bewegungszustand kennzeichnen, die Ausschläge q (Längenausschläge oder Winkelausschläge) zu verwenden. Geschwindigkeiten und Beschleunigungen werden dann durch die zeitlichen Ableitungen dieser Größen bezeichnet. Will man jedoch die Analogien zwischen den Vorgängen in mechanischen und elektrischen Gebilden hervorheben, so empfiehlt es sich, als Koordinaten eines mechanischen Vorgangs nicht die Ausschläge q selbst, sondern die ersten Ableitungen $\dot{q}$, heranzuziehen. Die Beziehungen zwischen den Kräften und der Koordinate nehmen dann zwar etwas andere Formen an, als man sie benutzt, wenn man rein mechanische Vorgänge untersucht, die Analogien zu den Vorgängen in den elektrischen Gebilden treten jedoch um so deutlicher hervor. Mit $\dot{q}$ als Koordinate suchen wir nun einen Zusammenhang herzustellen zwischen der Geschwindigkeitsdifferenz v an den Enden des

Elementes und der das Element beanspruchenden (es durchfließenden) Kraft p. Für Feder und Dämpfer finden wir sofort

$$\left.\begin{aligned} &\text{Feder} && v = h\,\frac{dp}{dt}\,, \\ &\text{Dämpfer} && v = d\cdot p\,. \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

Besondere Überlegungen sind jedoch nötig hinsichtlich des Punktkörpers, der „Masse". Wirkt auf einen Punktkörper mit der Masse m eine Kraft, so wird ihm eine Beschleunigung erteilt, die (wenn das *Newton*sche Grundgesetz gültig bleiben soll) gegen ein Inertialsystem gemessen werden muß. Damit man die unter Wirkung der Kraft erteilte Beschleunigung beim Punktkörper ebenso messen kann, wie der Ausschlag bei der Feder oder die Geschwindigkeit beim Dämpfer gemessen wurde, nämlich zwischen zwei Punkten des Elementes selbst, muß der (ruhende oder mit konstanter Geschwindigkeit bewegte) Bezugspunkt als Teil des Elementes (Schaltelementes) „Masse" betrachtet werden. Im Sinne der aufzustellenden Analogien besteht eine „Masse" also erstens aus dem Punktkörper selber, zweitens aus dem Bezugspunkt oder „Festpunkt", gegen den die unter Wirkung einer Kraft erteilte Beschleunigung gemessen wird. Punktkörper und Festpunkt zusammen bilden erst das Schaltelement „Masse".

Für die Beziehung zwischen der Geschwindigkeitsdifferenz an den „Enden" des Schaltelementes Masse und der das Element beanspruchenden Kraft gilt nun (Impulssatz)

$$\text{Masse} \qquad v = \frac{1}{m}\int p\,dt \tag{2a'}$$

Die Umkehrungen der Gleichungen (2a) lauten

$$\left.\begin{aligned} &\text{Feder} && p = \frac{1}{h}\int v\,dt\,, \\ &\text{Dämpfer} && p = \frac{1}{d}\,v\,, \\ &\text{Masse} && p = m\,\frac{dv}{dt}\,. \end{aligned}\right\} \tag{2b}$$

Man erkennt also eine vollkommene Analogie im Aufbau der Gleichungen (1) für die elektrischen und (2) für die mechanischen Elemente. Es entsprechen sich nämlich

Tabelle 1.

	Elektrisch		Mechanisch
Veränderliche	Spannung oder Potentialdifferenz zwischen den Enden des Elements	u	v Geschwindigkeitsdifferenz zwischen den Enden des Elements
	Strom durch das Element	i	p Kraft durch das Element
Systemgrößen	Induktivität	L	$h = \left(\frac{1}{c}\right)$ Federnachgiebigkeit
	Widerstand	R	$d = \left(\frac{1}{b}\right)$ Dämpfernachgiebigkeit
	Kapazität	C	m Masse

Eine besondere Bemerkung verdient dabei die jeweils letzte Gleichung von (2a) und (2b). Während in den ersten beiden Gleichungen (2) die Geschwindigkeit v die Relativgeschwindigkeit an den Enden des betreffenden Elementes (Feder oder Dämpfer) bezeichnet, gleichgültig, welchen Verlauf mit der Zeit ihre beiden Anteile aufweisen, ist die dritte Gleichung (2) nur dann richtig, wenn v die auf ein unbeschleunigt bewegtes Koordinatensystem bezogene Geschwindigkeit bedeutet. (Die Gleichung stellt dann die *Newton*sche Grundgleichung dar.) Für die ihr analoge dritte Gleichung (1) gilt eine solche Einschränkung jedoch nicht. Die Spannungsdifferenz an einem Kondensator kann gegen irgendein, auch veränderliches, Potential gemessen werden. Will man die Entsprechung also vollständig machen, so darf man einer Masse der mechanischen Kette nicht einen Kondensator schlechthin zuordnen, man muß vielmehr einen Kondensator wählen, dessen eine Platte ein konstantes Potential aufweist, kurz einen geerdeten Kondensator. Hieraus ergibt sich eine starke Beschränkung der Menge der elektrischen Schaltungen, denen auf der

mechanischen Seite Ketten zugeordnet werden können: Nur wenn in der elektrischen Schaltung alle Kondensatoren geerdet sind (oder sich zugleich erden lassen) findet sich eine mechanische Kette als entsprechendes Gebilde.

Während es also einerseits mechanische Gebilde (nämlich die Punktkörper von mehr als einem Freiheitsgrad und die starren Körper sowie deren „Verbände") gibt, denen keine elektrischen Schaltungen entsprechen, gibt es andrerseits auch elektrische Schaltungen (nämlich jene, deren Kondensatoren nicht alle zugleich „geerdet" werden können), denen keine mechanischen Gebilde entsprechen. In schematischer Weise zeigt Tabelle 2 diese Tatsache an.

Tabelle 2.

	Mechanische Gebilde		
	Ketten	Punktkörper (mit mehr als einem Freiheitsgrad) u. ihre Verbände	Starre Körper (mit mehr als einem Freiheitsgrad) u. ihre Verbände
Sonstige Schaltungen	Schaltungen mit geerdeten Kondensatoren		
Elektrische Schaltungen			

4. Die Zuordnung der Gebilde (Schaltungen). Wir kennen nun die einander entsprechenden Elemente der mechanischen und elektrischen Gebilde (Schaltungen). Jetzt stellen wir uns die Aufgabe, die einander entsprechenden, aus solchen Elementen aufgebauten Gebilde (Schaltungen) selbst zu finden. Mit anderen Worten: Wir wollen Regeln angeben, nach denen man zu einem gegebenen und in bestimmter Weise erregten mechanischen Gebilde jenes elektrische Gebilde (jene Schaltung) auffindet, dessen Vorgänge durch dieselbe Differentialgleichung beschrieben werden wie die Vorgänge des mechanischen Gebildes.

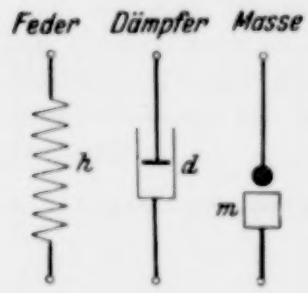


Abb. 1. Bilder der Schaltelemente Feder, Dämpfer, Masse.

Wie aus der Tabelle 1 hervorgeht, entsprechen sich einerseits die **Geschwindigkeitsdifferenz** an den Enden des mechanischen Elementes und die **Spannungsdifferenz** an den Enden des elektrischen Elementes, andererseits die durch das mechanische Element fließende **Kraft** und der durch das elektrische Element fließende **Strom**. Die mechanischen Gebilde können also nach Art der elektrischen Stromkreise als mechanische „Kraftkreise", aufgefaßt werden. Schaltelemente des Kraftkreises sind dabei die drei Elemente Feder, Dämpfer und Masse, die wir im Hinblick auf das zuvor über die Masse Gesagte in der in Abb. 1 gezeigten Art schematisch darstellen. Parallel liegen zwei mechanische (elektrische) Schaltelemente dann, wenn ihre Enden dieselbe Geschwindigkeitsdifferenz (Potentialdifferenz) aufweisen, in Reihe liegen sie dann, wenn sie von derselben Kraft (demselben Strom) beansprucht (durchflossen) werden.

In einer elektrischen Schaltung sind eine (oder mehrere) Spannungsquellen $u_0(t)$ oder Stromquellen $i_0(t)$ enthalten, die den in der Schaltung ablaufenden Vorgang erregen. Dabei ist eine Spannungsquelle (Stromquelle) dadurch gekennzeichnet, daß sie eine bestimmte Spannung (einen bestimmten Strom) als Funktion der Zeit aufrecht erhält, ohne daß die Rückwirkungen vom Kreis her imstande wären, diese Spannung (diesen Strom) zu beeinflussen. In ganz entsprechender Weise werden die Vorgänge in den mechanischen Gebilden dadurch erregt, daß an einem Punkt des Gebildes eine Kraft $p_0(t)$ angreift, die als Funktion der Zeit gegeben ist, oder dadurch, daß einem Punkt des Gebildes eine vorgegebene Geschwindigkeit $v_0(t)$ erteilt wird, ohne daß die Rückwirkungen imstande wären, die Kraft p_0 oder die Geschwindigkeit v_0 zu beeinflussen. Im mechanischen Kraftkreis sprechen wir dann in Analogie zur Stromquelle von einer „Kraftquelle" und analog zur Spannungsquelle von einer „Geschwindigkeitsquelle".

Wird einem Punkt des mechanischen Gebildes eine Kraft oder eine Geschwindigkeit aufgeprägt, so liegt die Kraftquelle oder Geschwindigkeitsquelle zwischen dem Festpunkt und dem Angriffspunkt. Es ist aber auch möglich, daß eine solche Quelle zwischen zwei verschiedenen Punkten eines Gebildes wirkt.

Ein Beispiel soll diese Auffassungen erläutern. Die Abb. 2a und 3a zeigen jeweils einen mechanischen Schwinger; der erste wird von einer an der Masse m angreifenden Kraft $p_0(t)$ erregt, im zweiten wird der Masse eine vorgeschriebene Geschwindigkeit $v_0(t)$ erteilt. Die den Schwingern entsprechenden „mechanischen Schaltungen" (auch „Kraftkreise" genannt) zeigen die Abb. 2b und 3b. Von den Schaltelementen h, d, m liegt jeweils ein Ende am Festpunkt A, das zweite hat die Geschwindigkeit des Punktes B; sie liegen also parallel. Ebenso liegen die Quellen, sowohl die Kraftquelle wie die Geschwindigkeitsquelle, parallel zu den Schaltelementen zwischen den Punkten A und B. Die glatten Striche in den Schaltungen (Kraftkreisen) bedeuten jeweils „Lei-

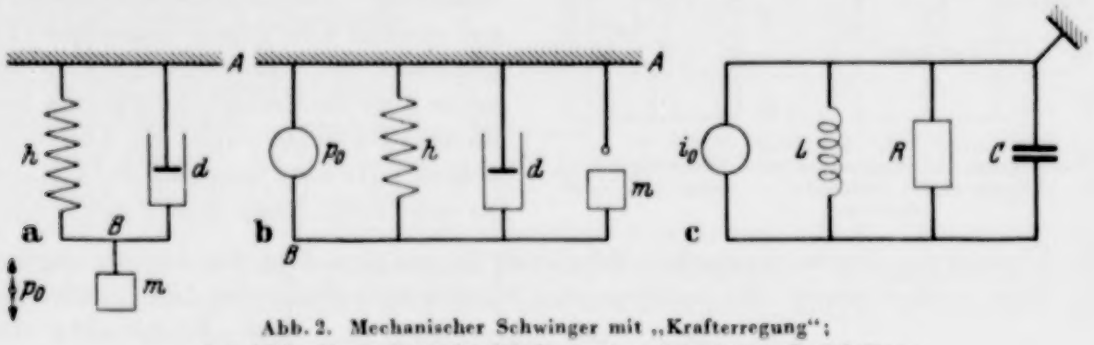


Abb. 2. Mechanischer Schwinger mit „Krafterregung";
a) Gebilde, b) mechanische Schaltung, c) analoge elektrische Schaltung.

tungen für den Kraftfluß", so wie sie bei elektrischen Schaltungen Leitungen für den Strom bezeichnen. Punkte, die im mechanischen Gebilde dieselbe Geschwindigkeit haben (also etwa durch starre Stangen verbunden sind), müssen im Schaltbild durch glatte Leitungen verbunden sein, (in der elektrischen Schaltung weisen sie dasselbe Potential auf, sie sind durch widerstandslose Leitungen verbunden). Zeichnet man mechanische Schaltbilder in der genannten Art, so verlangt die Umwandlung in die entsprechende elektrische Schaltung nur noch eine Änderung der Buchstaben und Symbole für die Elemente. Die Abb. 2c und 3c zeigen schließlich die entsprechenden elektrischen Schaltungen.

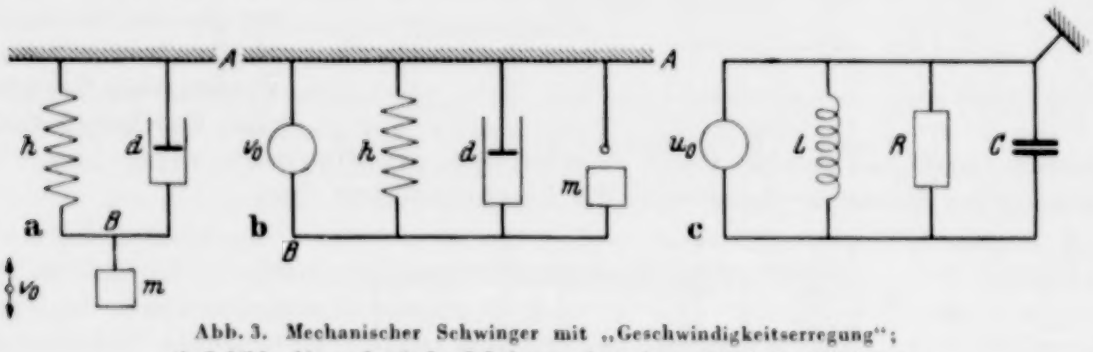


Abb. 3. Mechanischer Schwinger mit „Geschwindigkeitserregung";
a) Gebilde, b) mechanische Schaltung, c) analoge elektrische Schaltung.

Wir kontrollieren das Ergebnis durch Aufstellung der Bewegungsgleichungen: Die Bewegungsgleichung des mechanischen Gebildes Abb. 2a lautet, wenn die Geschwindigkeit v der Masse m (d. i. die Geschwindigkeit des jeweils nicht festgelegten Endes aller Elemente) als Koordinate dient,

$$m\frac{dv}{dt}+\frac{1}{d}v+\frac{1}{h}\int v\,dt=p_0\,,$$

die Differentialgleichung des Stromkreises 2c (*Kirchhoff*sches Gesetz) mit der Spannung u an den nicht geerdeten Enden aller Elemente als Koordinate lautet

$$C\frac{du}{dt}+\frac{1}{R}u+\frac{1}{L}\int u\,dt=i_0\,.$$

Man erkennt das vollkommene Entsprechen nach Tabelle 1.

Wir geben noch einige weitere Beispiele für mechanische Schwinger, ihre Umwandlung in eine mechanische Schaltung und danach in die zugehörige elektrische Schaltung. Abb 4a zeigt ein mechanisches Gebilde, das aus einer Masse m besteht, welche über zwei hintereinanderliegende Elemente, eine Feder und einen Dämpfer, mit dem Aufhängepunkt verbunden ist, und an der eine Kraft p_0 angreift. Die „mechanische Schaltung" zeigt Abb. 4b. Sie kommt so zustande, daß

man „das eine Ende der Masse m" an den Festpunkt legt, während das andere (die Masse selbst) dieselbe Geschwindigkeit hat, wie das Ende der hintereinander gelegten (von der gleichen Kraft durchflossenen) Elemente Feder und Dämpfer. Die Übersetzung in die elektrische Schaltung ergibt sich nun von selbst (Abb. 4c). Schließlich zeigt Abb. 5a eine aus drei Federn h_1, h_2, h_3 und drei Massen m_1, m_2, m_3 aufgebaute Kette, Abb. 5b zeigt die mechanische Schaltung: Die Geschwindigkeiten der Massen werden alle gegen denselben Festpunkt gemessen, die Geschwindigkeiten der Federenden sind die Geschwindigkeiten der Massen. Weitere Beispiele zeigen die Abb. 6 und 7. Im letzten tritt eine Geschwindigkeitsquelle auf; ihr entspricht dann eine Spannungsquelle.

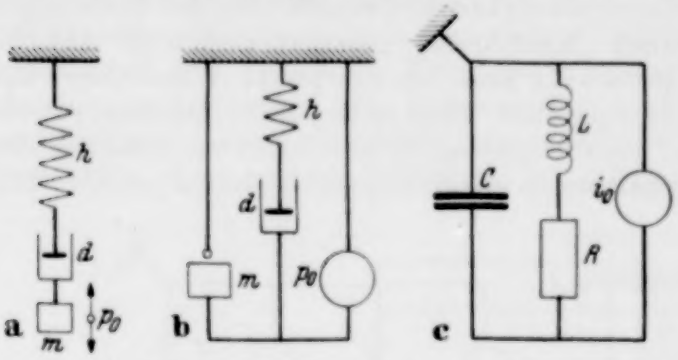


Abb. 4. Mechanischer Schwinger (von zwei Freiheitsgraden); a) Gebilde, b) mechanische Schaltung, c) analoge elektrische Schaltung.

Für die Herstellung der mechanischen Schaltung (b) aus dem Bild der Anordnung (a) gilt also die Regel: Man zeichne zuerst alle auftretenden Massen nebeneinander und „verbinde" sie mit dem Festpunkt; dann füge man die übrigen Elemente (Feder und Dämpfer) und die Quellen so hinzu, wie es die Geschwindigkeitsdifferenzen, die an ihren Enden herrschen, verlangen. Anders ausgedrückt: Ebenso wie die durch glatte Striche (Leitungen) verbundenen Punkte eines Stromkreises dieselbe Spannung aufweisen, so weisen die durch glatte Striche verbundenen Punkte eines Kraftkreises gleiche Geschwindigkeiten auf.

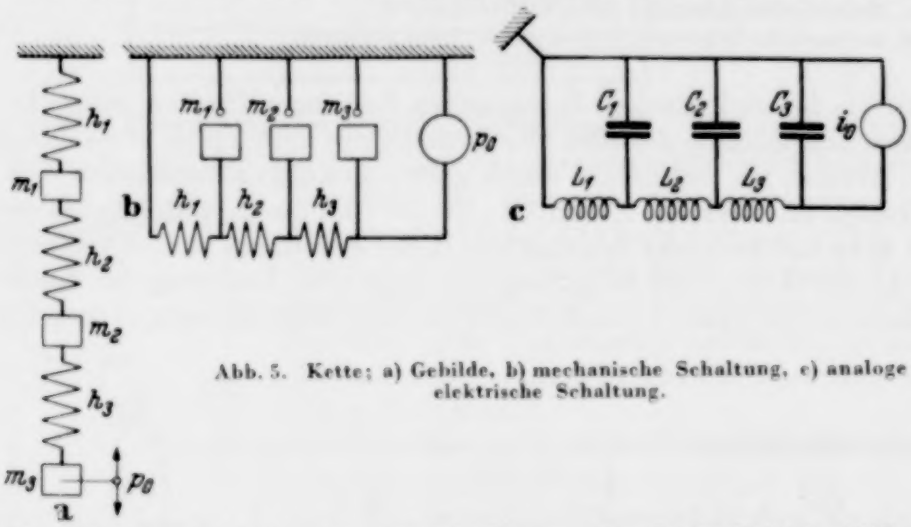


Abb. 5. Kette; a) Gebilde, b) mechanische Schaltung, c) analoge elektrische Schaltung.

Die Elemente sind nun gemäß diesen Geschwindigkeitsdifferenzen anzuordnen. Das „eine Ende" einer jeden Masse hat dabei stets die Geschwindigkeit Null.

Bis hierher hatten wir stets mechanische Gebilde vorgegeben und die ihnen entsprechenden elektrischen Schaltungen aufgesucht. Dieser Weg ist nach dem Gesagten stets gangbar, wenn das mechanische Gebilde eine Kette ist. Zu jeder mechanischen Kette, die aus einläufigen Punktkörpern oder Drehmassen, aus Dämpfern und Federn aufgebaut ist, und die dadurch angeregt wird, daß auf einen Punkt oder mehrere Punkte eine vorgegebene Kraft wirkt, oder dadurch, daß einem oder mehreren Punkten eine vorgegebene Geschwindigkeit erteilt wird, gibt es eine elektrische Schaltung, deren Vorgänge (bei geeigneter Wahl der Koordinaten) durch dieselbe Differentialgleichung beschrieben werden wie die Bewegungen der mechanischen Kette. Die elektrische Schaltung weist dabei die Besonderheit auf, daß alle vor-

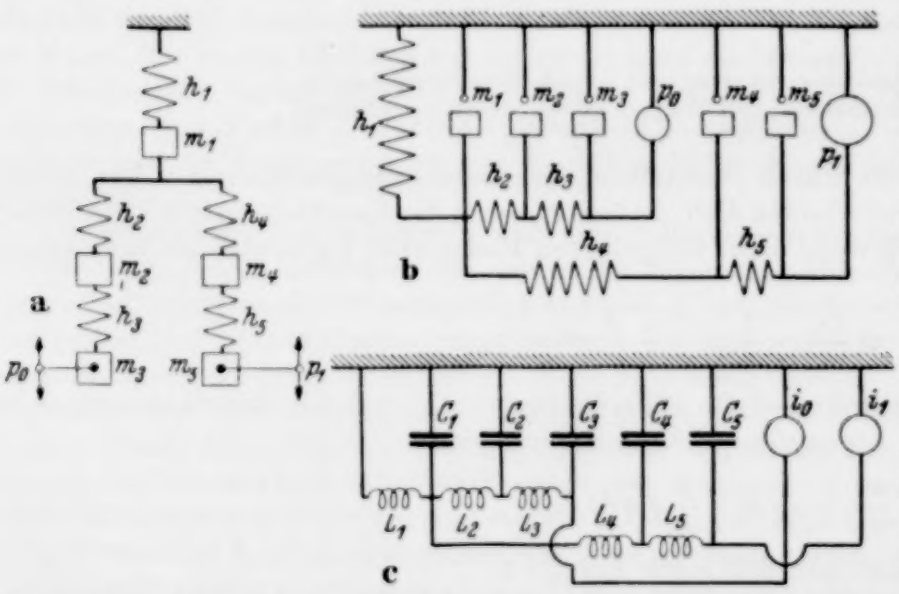


Abb. 6. Verzweigte Kette; a) Gebilde, b) mechanische Schaltung, c) analoge elektrische Schaltung.

kommenden Kondensatoren mit einer Seite an derselben unveränderlichen Spannung, d. h. an einem als geerdet gedachten Punkt liegen.

Will man umgekehrt die mechanischen Ketten aufsuchen, die vorgelegten elektrischen Schaltungen entsprechen, so ist notwendig, daß die eine Seite aller Kondensatoren auf dem gleichen Potential liegt. Ist das der Fall, so läßt sich eine entsprechende Kette finden, sonst nicht. Die Regel, wie man aus einem elektrischen Schaltbild (Stromkreis) ein mechanisches Schaltbild (Kraftkreis) und aus ihm die mechanische Anordnung findet, liegt nach allem Gesagten auf der Hand: Im elektrischen Schaltbild ersetzt man die Kondensatoren durch die Schaltelemente „Massen", die Spulen durch Federn, die Ohmschen Widerstände durch Dämpfer. Das so entstehende Schaltbild schneidet man nun am Festpunkt auf, d. h. man löst die „Verbindungen" aller Massen mit dem Festpunkt. So erkennt man die Anordnung des Gebildes.

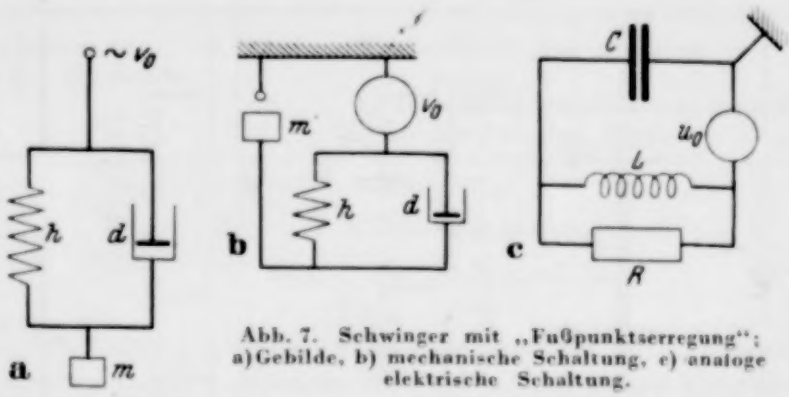


Abb. 7. Schwinger mit „Fußpunktserregung"; a) Gebilde, b) mechanische Schaltung, c) analoge elektrische Schaltung.

Als Beispiel für die Umwandlung elektrischer Schaltungen in mechanische Schwingerketten können die schon angegebenen Abb. 2 bis 7 dienen, die nur rückwärts gelesen werden mögen.

Darüber hinaus wollen wir aber noch folgende Frage zu beantworten suchen: In Abb. 8 sind 16 verschiedene „Vierpole"[1] gezeichnet, die als Bausteine elektrischer „Siebketten" Verwendung finden. Wir fragen nun: Welche dieser Vierpole (als Bausteine einer längeren Kette aus gleichartigen Bestandteilen gedacht) lassen sich ins Mechanische übersetzen?

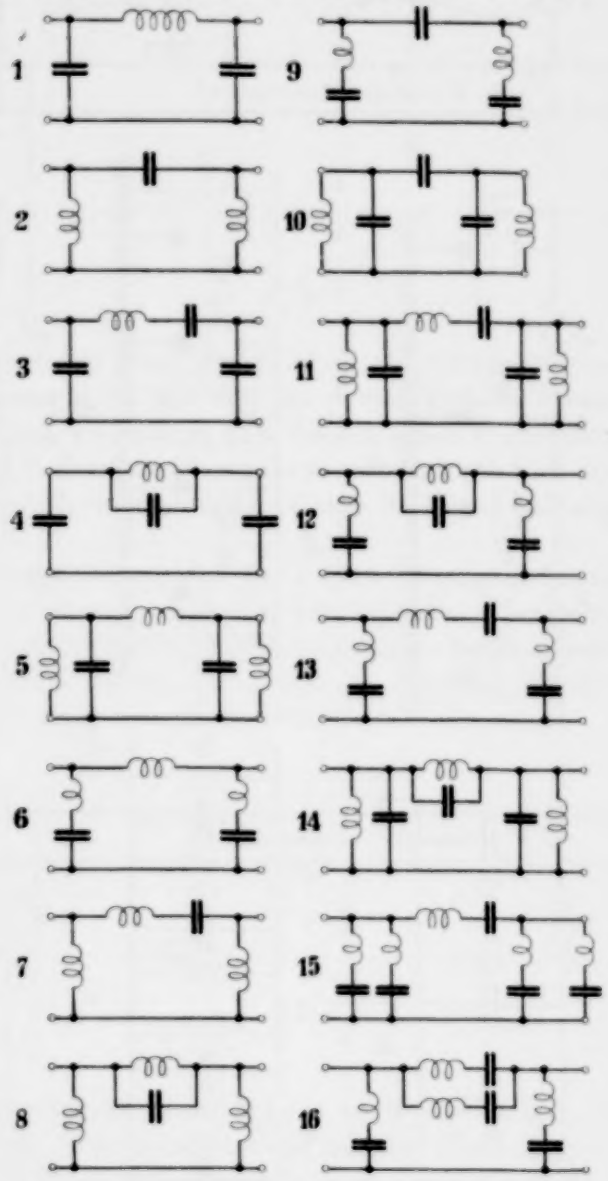


Abb. 8. Vierpole.

Aus dem zuvor Gesagten wissen wir, daß nur solche Schaltungen ein mechanisches Gegenstück haben, in denen sich alle vorhandenen Kondensatoren gleichzeitig erden lassen. Eine Durchmusterung der 16 Schaltungen ergibt, daß nur die mit 1, 5 und 6 bezeichneten die gestellte Bedingung erfüllen; nur ihnen entsprechen mechanische, elastische Ketten. In den Abb. 9 bis 11 sind in den Bildteilen a) jeweils zwei der angegebenen Vierpole zusammengefügt, in den Bildteilen b) ist die entsprechende mechanische Schaltung gezeichnet und in den Bildteilen c) ein zugehöriges mechanisches Gebilde. Man übersieht nun leicht, wie die Bilder zu erweitern wären, wenn mehr als zwei Vierpole zu einer Kette zusammengefügt würden.

Auf der mechanischen Seite können aus den Schaltungen in verschiedener Weise mechanische Systeme gebildet werden je nachdem, wie man die einläufigen Schwinger wählt. In Abb. 9c und c′ sind zwei Möglichkeiten angedeutet; im Falle c sind Massen gewählt, die sich auf der Geraden G verschieben können und die durch Dehnfedern verbunden sind; im Falle c′ Drehmassen, die sich um die Achse A drehen und durch Torsionsfedern verbunden sind. In den Abb. 11c und c′ sind zwei gleichwertige mechanische Anordnungen angedeutet. Die Bügel B bestehen aus starren Stangen.

[1] Entnommen aus: *K. Küpfmüller*, Einführung in die Theoretische Elektrotechnik, S. 274. Berlin 1941.

Würde man die Vierpole der Abb. 8 nicht als Bausteine einer Kette sondern als selbständige Schaltungen betrachten, so ließen auch die mit 2, 3, 7, 8 bezeichneten eine Übertragung ins Mechanische zu.

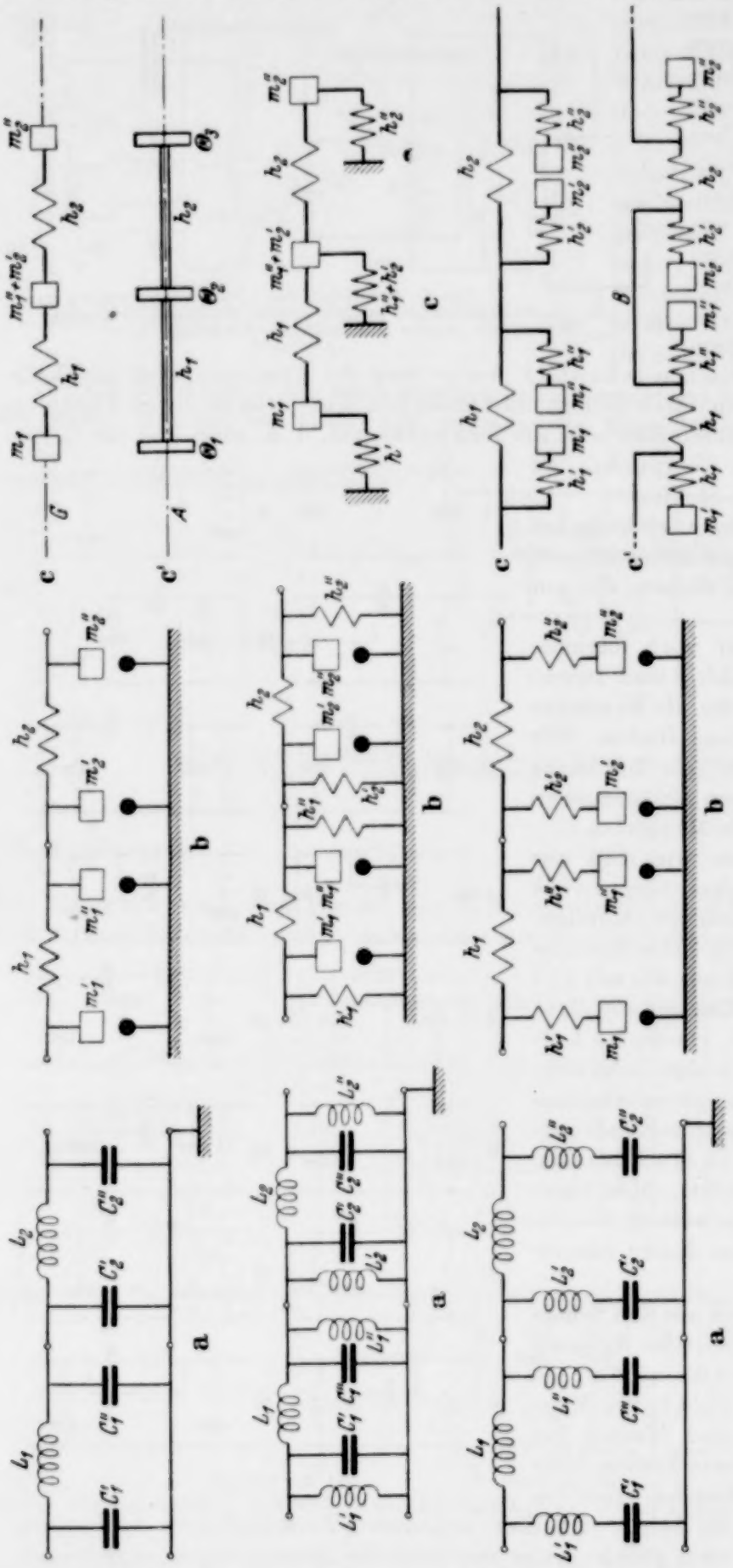


Abb. 9, 10, 11. Elektrische Ketten (*a*), mit entsprechenden mechanischen Schaltungen (*b*) und Gebilden (*c*).

5. Zweite (widerstandsreziproke) Zuordnung von Elementen und von Gebilden. Die Zuordnung von Veränderlichen und Systemgrößen elektrischer und mechanischer Gebilde, die durch Tabelle 1 ausgedrückt wird, ist zweckmäßig deshalb, weil sie nicht nur eine Zuordnung der Elemente erlaubt, sondern auch bei der Zuordnung der gesamten Gebilde die Anordnung, die „Schaltung" (ob „in Reihe" oder „parallel") ungeändert läßt. Die angegebene Zuordnung ist aber nicht die einzig mögliche. Stellt man nicht die Gleichungen (1a) den Gleichungen (2a) und demgemäß (1b) den (2b) gegenüber, sondern vielmehr (1a) gegen (2b) und (1b) gegen (2a), so kommt man auf die Zuordnungen der Tabelle 3.

Da sich nun die Veränderlichen (u und v), die als Differenzen an den Enden des Elementes auftreten, und jene, die im Element wirken (durch das Element fließen), (p und i), nicht mehr gegenseitig, sondern „über Kreuz" entsprechen, bleiben auch die Anordnungen, d.h. die Schaltungen, nicht mehr dieselben. Aus Parallelschaltungen werden vielmehr Reihenschaltungen, aus Reihenschaltungen Parallelschaltungen. Wegen dieses entscheidenden Nachteils ist die durch Tabelle 3 bezeichnete Zuordnung unzweckmäßig, wenn sie auch oft als die „natürlichere" angesehen wird, und zwar deshalb, weil sich hier Spannung u und Kraft p entsprechen, die man als die „Ursachen" der Vorgänge empfindet. (Zudem entsprechen sich dann auch der elektrische und der Dämpfungs„widerstand" in der Weise, wie diese beiden Größen üblicherweise definiert werden.) Da sich diese Zuordnung jedoch als unzweckmäßig erweist, gehen wir auf sie nicht weiter ein.

Tabelle 3.

	Elektrisch		Mechanisch	
Veränderliche	Spannung oder Potentialdifferenz zwischen den Enden des Elements	u	p	Kraft durch das Element
	Strom durch das Element	i	v	Geschwindigkeitsdifferenz zwischen den Enden des Elements.
Systemgrößen	Induktivität	L	m	Masse
	Widerstand	R	$\frac{1}{d} = b$	Dämpfungswiderstand
	Kapazität	C	h	Federnachgiebigkeit

Überdies sei an dieser Stelle noch die (durchaus geläufige) Tatsache erwähnt, daß auch zwei elektrische Schaltungen einander so zugeordnet werden können, daß die sich in ihnen abspielenden Vorgänge jeweils durch Differentialgleichungen derselben Bauart beschrieben werden. Man gewinnt die Zuordnung dadurch, daß man die Beziehungen (1a) und (1b) einander gegenüberstellt. Es entsprechen sich dann die Größen der Tabelle 4.

Tabelle 4.

	Im elektrischen System A	Im elektrischen System B
Veränderliche	u i	i u
Systemgrößen	L R C	C $1/R$ L

Die durch Tabelle 4 ausgedrückte Zuordnung bezeichnet man als die der „widerstandsreziproken" Schaltungen. Da aber auch für diese Zuordnung gilt, was für die durch Tabelle 3 ausgedrückte gesagt wurde, daß nämlich die als Differenzen zwischen den Enden eines Elementes gemessenen Größen in die durch ein zweites Element fließenden übergehen, gehen auch hier die Schaltungen in der Weise ineinander über, daß aus einer Parallelschaltung eine Reihenschaltung wird und umgekehrt.

Ebenso wie eine elektrische Schaltung durch Vertauschung der in Tabelle 4 angegebenen Veränderlichen und Schaltelemente in eine neue, zur ersten „widerstandsreziproke" übergeht, können auch zwei mechanische Gebilde, die durch entsprechende Vertauschungen auseinander hervorgehen, als widerstandsreziproke bezeichnet werden. Zwei mechanische Systeme heißen demgemäß widerstandsreziprok, wenn sie sich entsprechen wie in Tabelle 5.

Tabelle 5.

	Im mechanischen System A	Im mechanischen System B
Veränderliche	v p	p v
Systemgrößen	h d m	m $1/d = b$ h

Als Beispiel zeigen wir das zu Abb. 2 widerstandsreziproke Gebilde; es wird durch Abb. 12 angegeben. Zur Kontrolle diene die Bewegungsgleichung. Für 2a lautet sie mit der Koordinate v (Geschwindigkeit des Punktes B)

$$m\dot{v} + \frac{1}{d}v + \frac{1}{h}\int v\,dt = p_0\,;$$

für 12a mit der Koordinate p (Kraft, die in allen Elementen wirkt)

$$h\dot{p} + d\cdot p + \frac{1}{m}\int p\,dt = v_0\,.$$

Nimmt man eine Verwandlung von Reihenschaltung in Parallelschaltung und von Parallelschaltung in Reihenschaltung in Kauf, so lassen sich weitere elektrische Schaltungen finden, denen mechanische Ketten entsprechen. Liegen zwar nicht in der ursprünglich gegebenen Schaltung, aber in der zu ihr widerstandsreziproken, alle Kondensatoren mit einer Seite auf dem gleichen Potential, so kann man zu dieser widerstandsreziproken Schaltung eine mechanische Kette aufsuchen; die in ihr sich abspielenden Vorgänge entsprechen dann denen der ursprünglichen elektrischen Schaltung mit der Zuordnung nach Tabelle 3.

6. Komplexe Widerstände und Leitwerte. Bisher haben wir die mechanischen und elektrischen Schaltelemente und die Schaltungen selbst an Hand der durch (1) und (2) ausgedrückten Beziehungen einander zugeordnet, in denen die Augenblickswerte der Veränderlichen (i und u bzw. p und v) sowie ihre ersten Ableitungen und ersten Integrale auftreten. Falls man es mit periodischen Vorgängen zu tun hat (sie lassen sich in Harmonische entwickeln und wegen der Linearität aller Beziehungen auch überlagern), so macht man mit Vorteil Gebrauch von den Begriffen der komplexen Widerstände und komplexen Leitwerte für die elektrischen Schaltungen und den entsprechend gebauten Ausdrücken für die mechanischen Gebilde.

So erhält man, wenn $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{J}$ die komplexen Amplituden von Spannung und Strom nach $u = \mathfrak{U} e^{i\Omega t}$ und $i = \mathfrak{J} e^{i\Omega t}$, ferner $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{E}$ die komplexen Widerstände und komplexen Leitwerte bedeuten, für die elektrischen Kreise

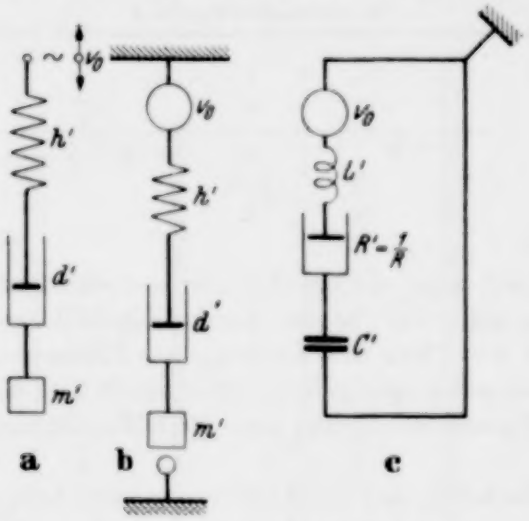


Abb. 12. Zur Abb. 2 widerstandsreziproke Anordnungen.

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{J}\,\mathfrak{W} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{W}_1 = -\frac{i}{\Omega C},$$

$$\mathfrak{W}_2 = R, \qquad \mathfrak{W}_3 = i\Omega L,$$

oder

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{U}\,\mathfrak{E} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{E}_1 = i\Omega C,$$

$$\mathfrak{E}_2 = \frac{1}{R}, \qquad \mathfrak{E}_3 = -\frac{i}{\Omega L},$$

und demgemäß für die mechanischen Gebilde, wenn $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{P}$ die komplexen Amplituden von Geschwindigkeit und Kraft nach $v = \mathfrak{V} e^{i\Omega t}$ und $p = \mathfrak{P} e^{i\Omega t}$, ferner $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{E}$ wieder die entsprechend gebauten Ausdrücke bezeichnen,

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{P}\,\mathfrak{W} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{W}_1 = -\frac{i}{\Omega m},$$

$$\mathfrak{W}_2 = d = \frac{1}{b}, \qquad \mathfrak{W}_3 = i\Omega h,$$

oder

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{V}\,\mathfrak{E} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{E}_1 = i\Omega m, \qquad \mathfrak{E}_2 = b = \frac{1}{d}, \qquad \mathfrak{E}_3 = \frac{-i}{\Omega h}.$$

Für die so definierten Größen $\mathfrak{W}_i$ und $\mathfrak{E}_i$, sowohl die elektrischen als auch die mechanischen, gilt, daß für Reihenschaltung der Elemente sich die Größen $\mathfrak{W}_i$ addieren ($\mathfrak{W} = \Sigma \mathfrak{W}_i$), für Parallelschaltung dagegen die Größen $\mathfrak{E}_i$ ($\mathfrak{E} = \Sigma \mathfrak{E}_i$).

Wir wollen noch bemerken, daß die Bezeichnungen „Widerstände" für die $\mathfrak{W}_i$ und „Leitwerte" für die $\mathfrak{E}_i$, auf die mechanischen Gebilde zweckmäßigerweise nicht übertragen werden, da man sich sonst in Widerspruch setzt mit der üblichen Auffassung, nach der ein Gebilde unter Wirkung einer Kraft eine um so kleinere Geschwindigkeit erfährt, je größer sein „Widerstand" ist.

Als Beispiel betrachten wir nur den einfachen Fall des Systems von einem Freiheitsgrad nach Abb. 2. Für das mechanische Gebilde (Abb. 2a) kommt so

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{P}_0 \mathfrak{W} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{W} = \frac{1}{\mathfrak{E}}, \qquad \mathfrak{E} = b + i\left(\Omega m - \frac{1}{\Omega h}\right),$$

also

$$\mathfrak{W} = \frac{b - i\left(\Omega m - \frac{1}{\Omega h}\right)}{b^2 + \left(\Omega m - \frac{1}{\Omega h}\right)^2}.$$

Wir diskutieren es noch etwas weiter. Fehlt der Dämpfer, so wird $b = 0$ und

$$\mathfrak{S} = i\left(\Omega m - \frac{1}{\Omega h}\right),$$

also

$$\mathfrak{W} = -i\,\frac{1}{\Omega m - \frac{1}{\Omega h}}.$$

Fragt man nun nach jenem Widerstand oder Leitwert, der eine Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ erlaubt, ohne daß eine Erregerkraft $\mathfrak{P}_0$ vorhanden ist, so findet man, daß $\mathfrak{W} = \infty$ oder $\mathfrak{S} = 0$ sein muß. Diese Forderung liefert

$$\Omega^2 m h = 1 \quad \text{oder} \quad \Omega^2 = \frac{1}{mh} = \omega^2$$

die bekannte Resonanzbedingung.

7. Zusammenfassung. Nennt man zwei Gebilde dann analog, wenn die in ihnen sich abspielenden Vorgänge durch dieselben Gleichungen oder Differentialgleichungen beschrieben werden, und fordert man ferner, daß sich die Elemente der Gebilde von endlich vielen Freiheitsgraden Stück für Stück entsprechen sollen, so kann man auf der mechanischen Seite nur Ketten, auf der elektrischen Seite nur solche Schaltungen in Betracht ziehen, deren Kondensatoren sich (entweder unmittelbar oder in der widerstandsreziproken Schaltung) alle zugleich erden lassen.

Von den beiden möglichen Zuordnungen der Elemente, wie sie durch die Tabellen 1 und 3 angegeben werden, ist die zweite die übliche und fast allein bekannt; sie ist aber unzweckmäßig deshalb, weil für Gebilde mit mehr als einem Freiheitsgrad eine Reihenschaltung in eine Parallelschaltung übergeht und umgekehrt. Zweckmäßig ist die erste Zuordnung; sie läßt die Schaltungsart ungeändert.

(Eingegangen am 24. Oktober 1949.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *K. Klotter*, Karlsruhe-Rüppurr, Hegaustr. 4.

Die zeichnerische Bestimmung der Schleppkurven.

Von K. Hain.

1. Allgemeines. Die überragende Bedeutung der Schleppkurven in der Fahrzeugtechnik weist auf die Notwendigkeit hin, diese Kurven in Abhängigkeit von allen Bestimmungsgrößen auf einfache und doch genügend genaue Weise darstellen zu können. Bei den Straßenfahrzeugen übt die Form der Schleppkurve ihren Einfluß auf den Lauf des Fahrzeuganhängers hinter dem ziehenden Fahrzeug aus. Es ist hier erwünscht, daß der gesamte Lastzug möglichst in der gleichen Spur des vorderen Fahrzeuges läuft. Das Pendeln der Fahrzeuganhänger bei großen Geschwindigkeiten ist ebenfalls in mittelbarem Sinne von den Schleppkurvenformen abhängig.

Bei den landwirtschaftlichen Maschinen und Geräten muß noch die Eigensteuerung berücksichtigt werden; d. h. in bestimmten Fällen wird ein solches Gerät zwar gezogen, soll aber möglichst unabhängig vom ziehenden Fahrzeug mit Hilfe einer Steuereinrichtung seinen Kurs verbessern können.

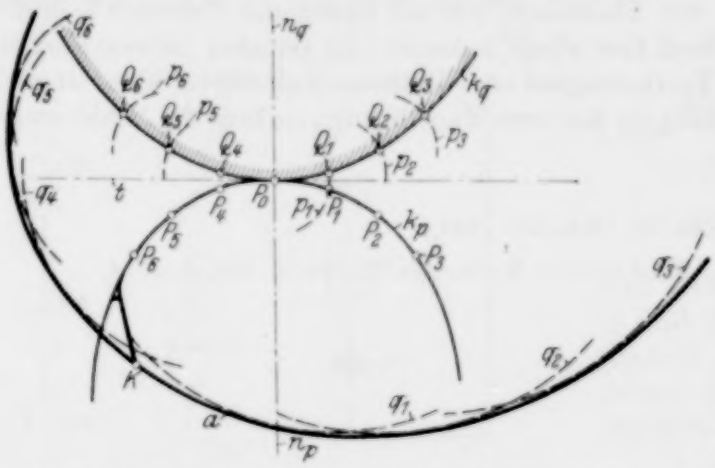


Abb. 1. Allgemeine Bewegungsverhältnisse beim Abrollen zweier beliebiger Polkurven.

2. Allgemeine kinematische Betrachtungen. Bei den folgenden Schleppkurvenuntersuchungen wird die kinematische Betrachtungsweise in den Vordergrund gestellt, indem die Deichsel als ein eben bewegtes System angesehen wird, von dem ein bestimmter Punkt die Ursprungskurve und ein anderer Punkt die Schleppkurve beschreibt. Nach Abb. 1 sollen zunächst die allgemeinen Grundlagen der ebenen Bewegung gestreift werden.

Jede beliebige ebene Bewegung eines ebenen Systems läßt sich ersetzen durch das Abrollen zweier Rollbahnen, der sog. Polbahnen, aufeinander, von denen die eine, die Rastpolbahn, stillsteht und die andere, die Gangpolbahn, auf dieser ohne Gleiten abrollt. Ist in Abb. 1 die Gestalt der Rastpolbahn k_q und der Gangpolbahn k_p gegeben, so läßt sich mühelos die Bahnkurve a jedes beliebigen Punktes K der Ebene der Gangpolbahn aufzeichnen, indem man gleichen Teilstücken P_0Q_1, Q_1Q_2 . . . der Rastpolbahn entsprechend gleiche Teilstücke P_0P_1, P_1P_2 . . . der Gangpolbahn ermittelt und die Punkte P_1, Q_1, P_2, Q_2 . . . so miteinander zur Deckung bringt, daß in jeder Lage die Normale n_q der Rastpolbahn mit der Normalen n_p der Gangpolbahn in die gleiche Richtung fällt. Da ein gleitloses Abrollen der beiden Polkurven eine genaue Übereinstimmung der Kurvenbögen $P_0Q_1 = P_0P_1$, $Q_1Q_2 = P_1P_2$ . . . voraussetzt, ist es einleuchtend, daß diese Kurvenbögen, wenn sie mit dem Zirkel abgestochen werden, wegen einer guten Übereinstimmung zwischen Bogen und Sehne nicht zu groß zu wählen sind.

Wenn aber beispielsweise die Form der Gangpolbahn k_p und die Bahnkurve a eines Punktes K der Gangpolbahn-Ebene gegeben sind, so kann man die Rastpolbahn k_q auf folgende, bisher noch nicht bekanntgegebene Art punktweise konstruieren. Man nimmt in Abb. 1 auf der Gangpolbahn beliebige Punkte P_1, P_2, . . . P_6 an, wobei für die einzelnen Punktentfernungen die Bogenlänge mit der Sehnenlänge in praktischen Grenzen übereinstimmen muß, und schlägt um den Ausgangspunkt P_0 einen Kreisbogen p_1 mit dem Halbmesser P_0P_1. Dann zeichnet man den berührenden Kreis q_1 an die gegebene Kurve a mit dem Halbmeser P_1K und dem Mittelpunkt Q_1 auf dem Kreisbogen p_1. Die Punkte Q_2 und Q_3 findet man auf den Kreisbögen um Q_1 und um Q_2 mit P_1P_2 und P_2P_3 als Halbmesser, indem man an die Kurve a die berührenden Kreise q_2 und q_3 mit den Halbmessern P_2K und P_3K und den Mittelpunkten Q_2 und Q_3 auf p_2 und p_3 zeichnet. Für die Punkte Q_4 bis Q_6 gelten die gleichen Maßnahmen. Da die Übereinstimmung

$P_0Q_1 = P_0P_1$, $P_1P_2 = Q_1Q_2$, ... $P_5P_6 = Q_5Q_6$ für sämtliche Kurvenstücke herbeigeführt wird, ist auch das einwandfreie Abrollen der beiden Polkurven aufeinander gewährleistet. Die Anfangslage P_0K der Ebene der Gangpolbahn k_p kann beliebig gewählt werden, die Form der Rastpolbahn k_1 wird unabhängig von dieser Anfangslage immer die gleiche bleiben. Mit den beiden Polkurven ist nunmehr die Bewegung der zur Gangpolbahn gehörigen Ebene vollkommen darstellbar.

3. Schleppkurven des einfach geführten Rades. Bei der Anwendung der bisherigen Betrachtungen auf die Konstruktion der Schleppkurve ergeben sich folgende Vereinfachungen. Da der Radpunkt S (Abb. 2) als Punkt der Deichsel l nur Bewegungen in Richtung der Radmittenebene vollführen kann, jede Bewegung senkrecht dazu ausgeschlossen ist, muß die Deichsel in ihrem Punkt S immer Tangente an die von dem Punkt S beschriebene Kurve sein. Der augenblickliche Drehpol einer bewegten Ebene, von welcher die Bahnkurven zweier Punkte gegeben sind, ergibt sich als der Schnittpunkt der beiden Bahnnormalen. Die beiden gegebenen Bahnkurven sind in unserem Falle die in Abb. 2 als Gerade gezeichnete Ursprungskurve a und die Schleppkurve s. Da aber die Normale der Schleppkurve mit der Deichsel l immer einen konstanten, beispielsweise rechten Winkel bildet, liegen sämtliche augenblicklichen Drehpole relativ zur bewegten Deichsel auf einer Geraden, d. h. die Gangpolbahn als geometrischer Ort dieser Drehpole ist eine Gerade, welche mit der Radachse identisch ist. Diese Festetellungen können ganz allgemein u. a. auch für Lenkanordnungen, bei denen der Kupplungspunkt nicht in der Radebene liegt, in folgendem Satz zusammengefaßt werden:

Wird ein Rad auf einer Rollebene so geschleppt, daß die Radebene stets senkrecht zur Rollebene bleibt, so genügt für die Beschreibung der Bewegungen des Rades die Betrachtung der Bewegung der — sich als Strecke von Raddurchmesserlänge darstellenden — orthogonalen Projektion der Radscheibe auf die Rollebene; und zwar bewegt sich diese Strecke so in der Rollebene, daß die Gangpolbahn eine zu ihr senkrechte Gerade, nämlich die Projektion der Radachse auf die Rollebene ist.

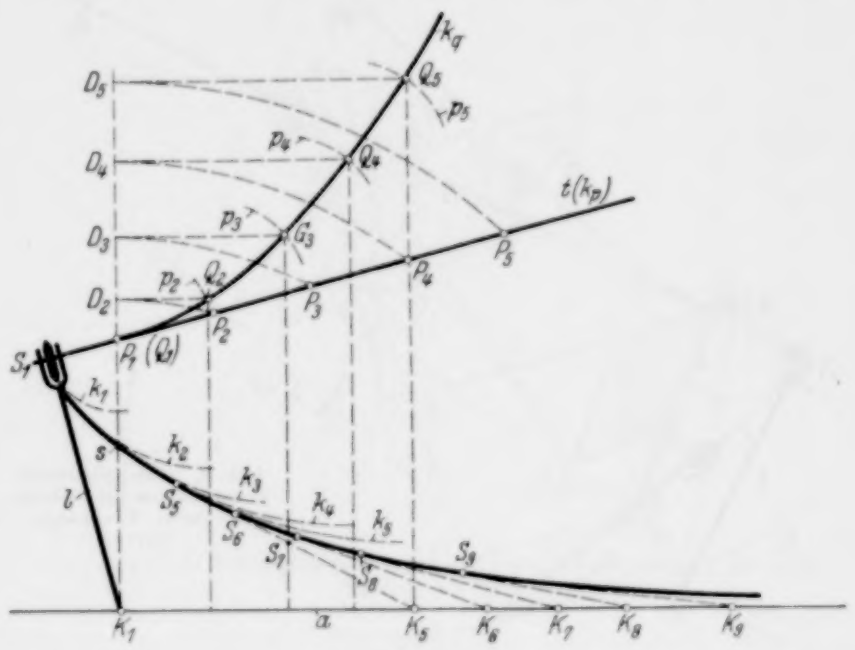


Abb. 2. Entstehung der Schleppkurve s aus dem Abrollen der geradlinigen Gangpolbahn t auf der Rastpolbahn k_q.

Bei der Konstruktion der Schleppkurve sind gegeben die Ursprungskurve a, auf welcher der Kupplungspunkt K geführt wird, und die Gangpolbahn als die Radachse. Zu ermitteln ist die Gestalt der Rastpolbahn und aus dem Abrollen der Gangpolbahn auf der Rastpolbahn die Bahnkurve des zur Ebene der Gangpolbahn gehörigen Punktes S, der außerdem auf der Gangpolbahn selbst liegt.

In Abb. 2 soll zunächst die Ursprungskurve a eine gerade Linie sein. Bei gegebener Deichsellänge $KS = l$ ist bei einer Anfangslage K_1S_1 auch die Lage der Gangpolbahn $t\,(k_p)$ bzw. der Radachse bestimmt. Den Pol P_1 findet man als Schnittpunkt der Radachse t mit der Senkrechten in K_1 auf der Ursprungskurve a. Auf der Geraden t nimmt man beliebig eine Anzahl Punkte P_2, P_3, ... P_5 an und bringt die Kreisbögen mit K_1 als Mittelpunkt und K_1P_2, K_1P_3, ... K_1P_5 als Halbmesser zu den Schnitten D_2, D_3, ... D_5 mit der Senkrechten K_1P_1. Die Parallelen durch D_2, D_3 ... D_5 zu a schneiden die Kreisbögen p_2, p_2, p_3, ... p_5 in den Punkten Q_2, Q_3 ... Q_5 der Rastpolbahn k_q, wobei die Kreisbögen p_2, p_3, ... p_5 jeweils mit den Halbmessern P_1P_2, P_2P_3, ... P_4P_5 um den vorher gefundenen Q-Punkt als Mittelpunkt, also um $Q_1 (= P_1)$, Q_2, ... Q_4 gezeichnet werden. Nun könnte man die Gangpolbahn t auf der punktweise ermittelten Rastpolbahn k_q abrollen lassen und dabei die Schleppkurve s als Bahn des Punktes S_1, der ein fester Punkt der Geraden t ist, bestimmen. Einfacher und genauer ist aber die Ermittlung der Schleppkurve s

als Hüllkurve der einzelnen Krümmungskreise. Da der augenblickliche Pol immer Krümmungsmittelpunkt aller Punkte der Polbahntangente t ist, gilt für die Lage „1" der Punkt $P_1(Q_1)$ als Krümmungsmittelpunkt und $P_1 S_1$ als Halbmesser des Krümmungskreises k_1. An diesen schließen sich die Krümmungskreise $k_2, k_3, \ldots k_5$ an, die ihren Krümmungsmittelpunkt in $Q_2, Q_3, \ldots Q_5$ und die Halbmesser $P_2 S_1$, $P_3 S_1, \ldots P_5 S_1$ haben.

Wenn die Q-Punkte weit außerhalb der Zeichenebene fallen, so bedeutet dies auch einen entsprechend großen Krümmungshalbmesser der Schleppkurve. Für diese Bereiche kann man den Krümmungskreis mit guter Annäherung durch gerade Teilstücke ersetzen. Man wird also, Abb. 2, um einen gerade noch zeichnerisch darstellbaren Q-Punkt, beispielsweise Q_5, den Krümmungskreis k_5 mit dem zugehörigen Punkt K_5 festlegen und dann noch weitere beliebige Punkte $K_6, K_7, \ldots K_9$ auf a annehmen und die entsprechenden Punkte $S_6, S_7, \ldots S_9$ als Schnittpunkte bzw. der Geraden $K_5 S_5, K_6 S_6, \ldots K_8 S_8$, also der Geraden mit dem jeweils um 1 kleineren Zeiger, mit den Kreisen vom Halbmesser r um die Punkte $K_6, K_7, \ldots K_9$ festlegen. Die Form der Schleppkurve s in diesem Bereich findet man dann als Hüllkurve aller Strecken KS.

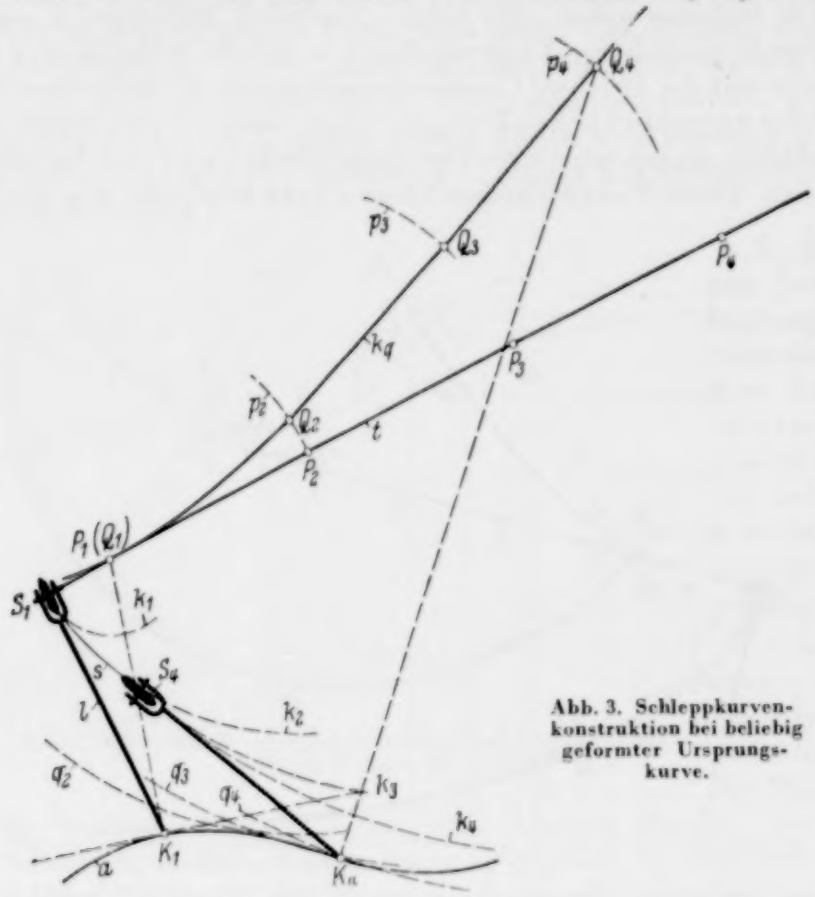


Abb. 3. Schleppkurvenkonstruktion bei beliebig geformter Ursprungskurve.

Eine stark vereinfachte Konstruktion für beliebiger Ursprungskurve ergibt sich, wenn man auf eine genaue Bestimmung der D- und Q-Punkte verzichtet. In Abb. 3 ist eine Anfangslage $K_1 S_1$ angenommen, deren Pol P_1 sich ergibt als Schnittpunkt der Radachse t mit der Normalen in K_1 an die Kurve a. Nun nimmt man wieder beliebige Punkte P_2, P_3, P_4 ..., auf t an, schlägt um P_1 mit $P_1 P_2$ als Halbmesser den Kreis p_2 und sucht auf diesem Kreis den Mittelpunkt Q_2 des die Kurve a berührenden Kreises q_2 mit $P_2 K_1$ als Halbmesser. Dann zeichnet man den Kreisbogen p_3 um Q_2 mit $P_2 P_3$ als Halbmesser und bestimmt auf p_3 den Mittelpunkt Q_3 des die Kurve a berührenden Kreises q_3 mit $P_3 K_1$ als Halbmesser. In der gleichen Weise findet man dann die Punkte Q_4 usw. Die Schleppkurve s ergibt sich wie in Abb. 2 als Umhüllende der Krümmungskreise $k_1, k_2, k_3, k_4 \ldots$ um $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \ldots$ mit $P_1 S_1$, $P_2 S_1$, $P_3 S_1$, $P_4 S_1, \ldots$ als Halbmesser.

4. Die Schleppkurven der Koppellenkung. Bei den Schleppkurven der Koppellenkung[1] gelten die gleichen Grundlagen wie bei dem einfach geschleppten Rad. Die Projektion des Radmittendurchmessers fällt auch immer mit der Tangente an die beschriebene Schleppkurve zusammen, und die Projektion der Achse des Rades ist die Gangpolbahn. Als grundlegender Unterschied gilt nur die Verbindung des geschleppten Rades mit dem ziehenden Fahrzeug. Während bei der einfachen Lenkung diese Verbindung aus einem einfachen Kupplungspunkt bestand, sind es bei der Koppellenkung zwei Anlenkpunkte, die an dem ziehenden Fahrzeug vorgesehen werden müssen. Es handelt sich dann also nicht mehr um die Berücksichtigung der Ursprungskurve eines Punktes, sondern um die Ursprungsbewegung einer Ebene, dargestellt durch die Verbindungsstrecke der beiden Anlenkpunkte.

Die zeichnerische Bestimmung der Schleppkurve ist auch bei der Koppellenkung unter Benutzung der Polbahntangente als Gangpolbahn möglich. In Abb. 4 sei angenommen, daß die Abmessungen $CDEF$ der Koppellenkung gegeben sind und die Anlenkpunkte C und D auf einander parallelen geradlinigen Ursprungskurven a_1 und a_2 geführt werden. Den augenblicklichen

[1] Vgl. auch *K. Hain*, Landtechnik 4 (1949), S. 769.

Pol P_1 findet man, wenn man vom Schnittpunkt R_1 der beiden Lenker C_1F_1 und D_1E_1 das Lot auf a_1 bzw. a_2 fällt und dieses zum Schnitt mit der Radachse t bringt. Der Krümmungskreis k_1 der Schleppkurve s im Punkte S_1 hat den Mittelpunkt P_1 und den Halbmesser P_1S_1.

Man nimmt nun wieder auf t beliebige Punkte P_2, P_3, ... an. Nunmehr läßt man aber C_1D_1 feststehen und ermittelt punktweise die Koppelkurve γ_2 des Punktes P_2 als Koppelpunkt der Koppel E_1F_1 im Gelenkviereck $C_1D_1E_1F_1$, wenn sich die Punkte E_1 und F_1 auf den Kreisbögen k_e und k_f um D_1 und C_1 bewegen. An die Koppelkurve γ_2 zeichnet man die Tangente q_2 parallel zu a_1 bzw. a_2 und bringt diese zum Schnitt Q_2 mit dem Kreisbogen p_2 um P_1 und P_1P_2 als Halbmesser. Der Krümmungskreis k_2 der Schleppkurve s hat den Mittelpunkt Q_2 und den Halbmesser P_2S_1.

Mit dem Punkt P_3 der Polbahntangente t verfährt man in der gleichen Weise, indem man seine Koppelkurve γ_3 ermittelt und an diese die Tangente q_3 parallel zu a_1 und a_2 zeichnet. Die Tangente q_3 schneidet den Kreisbogen p_3 um Q_2 mit P_2P_3 als Halbmesser im Punkt Q_3, dem Mittelpunkt des Krümmungskreises k_3 mit P_3S_1 als Halbmesser. Die Krümmungskreise k_1, k_2, k_3, ... ergeben in der gleichen Weise wie bei dem einfach geschleppten Rad die Schleppkurve s als Hüllkurve.

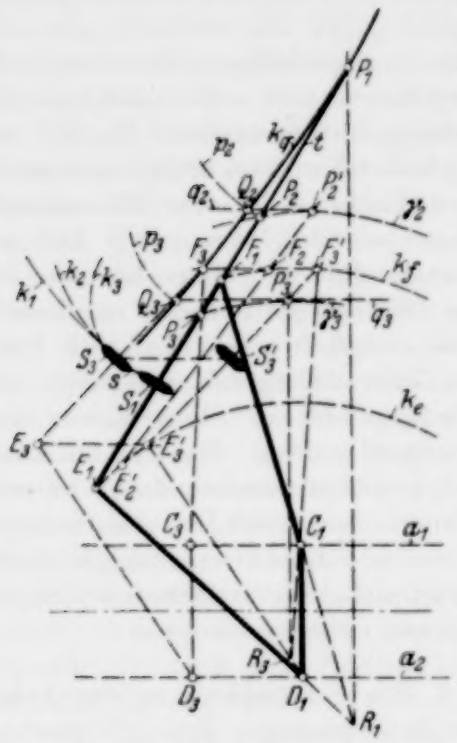


Abb. 4. Schleppkurvenkonstruktion der Koppellenkung bei geradliniger Ursprungskurve.

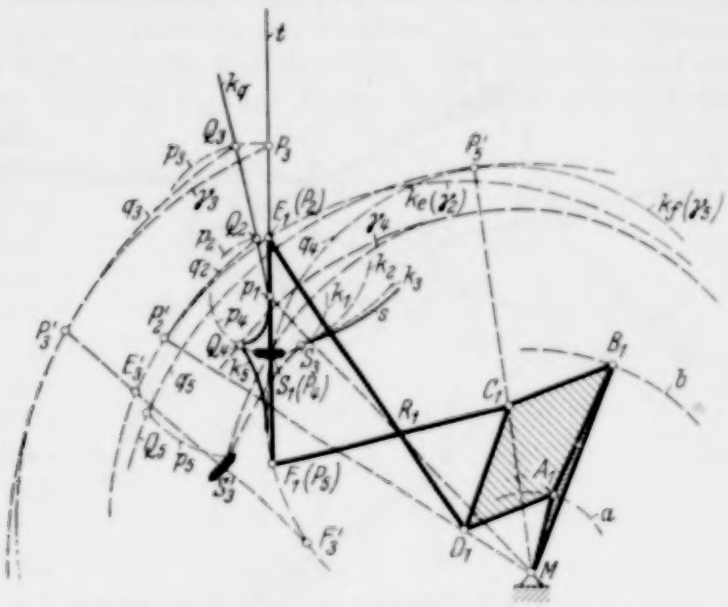


Abb. 5. Schleppkurvenkonstruktion der Koppellenkung bei kreisförmiger Ursprungskurve.

In Abb. 5 soll die Schleppkurve einer Koppellenkung mit gekreuzten Lenkern ermittelt werden, wenn sich die Ebene $A_1B_1C_1D_1$ des ziehenden Fahrzeuges um einen Punkt M dreht. Der augenblickliche Pol P_1 ergibt sich hier als Schnittpunkt der Polbahntangente t mit der Verbindungsstrecke MR_1, wenn R_1 der Schnittpunkt der beiden Lenker C_1F_1 und D_1E_1 ist. Der Krümmungskreis k_1 hat wie immer den Halbmesser P_1S_1 und den Mittelpunkt P_1. Von den auf der Polbahntangente t anzunehmenden P-Punkten soll beispielsweise der Punkt P_2 mit dem Punkt E_1 zusammenfallen. Dies hat den Vorteil, daß bei feststehendem C_1D_1 die Koppelkurve γ_2 des Punktes P_2 der Kreisbogen k_e des Punktes E_1 um D_1 ist. An Stelle der Tangenten q_2, q_3 ... der Abb. 4 treten in Abb. 5 die berührenden q-Kreise an die γ-Koppelkurven um den Punkt M, so daß der berührende Kreis q_2 mit dem Berührungspunkt P_2' leicht gefunden wird durch den Schnitt von MD_1 mit dem Kreis k_e. Der Mittelpunkt Q_2 des Krümmungskreises k_2 mit dem Halbmesser P_2P_1 ergibt sich als Schnittpunkt q_2 um M mit MP_2' als Halbmesser mit dem Kreis p_2 um P_1 mit P_1P_2 als Halbmesser. Der Punkt P_3 auf t wurde wieder beliebig angenommen. Seine Koppelkurve ist γ_3, und deren berührender Kreis in P_3' um M schneidet den Kreis p_3 um Q_2 mit P_2P_3 als Halbmesser im Mittelpunkt Q_3 des Krümmungskreises k_3 mit P_3S_1 als Halbmesser. In Abb. 5 ist die Koppellage $E_3'F_3'$ mit dem Radpunkt S_3' eingezeichnet. Verdreht man S_3' um M bis zum Schnitt S_3 mit der Schleppkurve s, so muß der Winkel $S_3'MS_3$, der die dem Punkt P_3 entsprechende Verdrehung der Führungsebene $A_1B_1C_1D_1$ angibt, gleich dem Winkel $P_3'MQ_3$ sein. Als Punkt P_4 auf der Polbahntangente t soll der Punkt S_1 angenommen werden. Die Schleppkurve bildet

in diesem Falle eine scharfe Spitze, die den Übergang vom Schieben zum Ziehen bedeutet. Man muß die Koppelkurve γ_4 des Punktes P_4 und an diese um M den berührenden Kreis q_4 zeichnen, der den Kreisbogen p_4 um P_1 mit P_1P_4 als Halbmesser in dem der Rastpolbahn k_a angehörigen Spitzenpunkt Q_4 schneidet. Nimmt man den Punkt P_5 mit F_1 zusammenfallend an, so ist die Koppelkurve γ_5 der Kreis k_f des Punktes F_1 um C_1. Die Verbindungsstrecke MC_1 schneidet k_f in P_5', dem Berührungspunkt des Kreises q_5 um M mit dem Kreis k_f. Der Kreis q_5 wiederum schneidet den Kreis p_5 um Q_4 mit P_5S_1 als Halbmesser im Mittelpunkt des Krümmungskreises k_5 mit P_5S_1 als Halbmesser.

Wird die Führungsebene $A_1B_1C_1D_1$ nicht auf einem Kreis mit bekanntem Mittelpunkt, sondern irgendwie bewegt, so müssen an Stelle des Mittelpunktes M die Polbahnen der Bewegung dieser Führungsebene ermittelt werden, und es ist dann jeweils die Bahnkurve in der Ebene dieser Gangpolbahn zu suchen, die die entsprechende γ-Koppelkurve berührt. Diesen umständlichen Weg kann man aber vermeiden, wenn man die Ursprungsbewegung in Teildrehungen und gerade Teilverschiebungen aufteilt, für welche sich dann nach den Abb. 4 und 5 die Schleppkurven in der beschriebenen Art bestimmen lassen.

Mit Hilfe der Koppellenkungen läßt sich jede Bewegungsart verwirklichen. So kann z. B. erstmalig die Forderung erfüllt werden, bei gegebener Ursprungskurve und außerdem bei vorgegebener Form der Schleppkurve eine dazu notwendige Lenkung zu entwerfen. Da die angegebenen Untersuchungen einen tieferen Einblick in die Zusammenhänge bei der Bewegung des geführten Rades geben können, ist eine Weiterentwicklung in diesem Sinne möglich geworden. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll allerdings darauf nicht näher eingegangen werden. Nur soviel kann noch erwähnt werden, daß eine rein rechnerische Behandlung hoffnungslos ist, wie die Differentialgleichungen schon bei der einfachsten Lenkanordnung erkennen lassen.

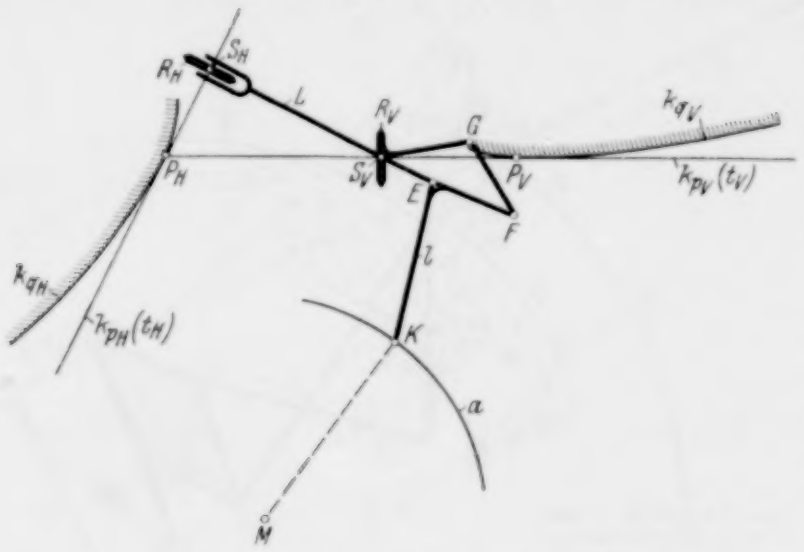


Abb. 6. Polbahnen der Achsschenkellenkung.

5. Die Schleppkurven der Achsschenkellenkung. Das besondere Kennzeichen der Achsschenkellenkung, die in den meisten Fällen als Vorderradlenkung ausgeführt wird, besteht darin, daß die Achse der Hinterräder mit dem Fahrgestell eine starre Ebene bildet, wobei in einem Punkt dieser Ebene die Deichsel und in anderen Punkten die Vorderräder getrennt voneinander gelagert sind und die lenkbaren Vorderräder über ein besonderes Steuergetriebe von der Deichsel aus verschwenkt werden.

Man kann (Abb. 6) die beiden Hinterräder durch ein in der Mitte zwischen beiden angeordnetes Rad R_H ersetzen. Dasselbe ist auch bei den Vorderrädern zulässig, wobei das hier in der Mitte angebrachte Einzelrad R_V immer von der Deichsel so verschwenkt werden muß, daß die Verlängerung seiner Achse durch den Schnittpunkt der Achsen der beiden ersetzten Vorderräder geht. Im Punkt E ist der mit der Deichsel l fest verbundene Hebel EF gelagert, der über den Hebel FG mit dem Hebel S_VG in gelenkiger Verbindung steht, wobei der letztere mit der chwenkachse des Rades R_V fest verbunden ist. Die Konstruktionsgrößen sind der Radstand L, die Entfernung S_VE zwischen Vorderrad- und Deichseldrehpunkt und die Deichsellänge $EK = l$.

Die allgemeine kinematische Bedeutung der Schleppkurve, daß nämlich die Radachse die Gangpolbahn darstellt, behält auch für die Achsschenkellenkung ihre volle Gültigkeit. Es ist nur hier zu beachten, daß jedes der beiden Räder mit seiner Achse auf je einer Rastpolbahn k_{qV} und k_{qH} abrollt, wobei eine wichtige vorbereitende Arbeit die Bestimmung der augenblicklichen Drehpole ist. Der augenblickliche Drehpol P_H des Hinterrades wird schnell gefunden als Schnittpunkt der beiden Achsen t_H und t_V, Abb. 6; denn die beiden Radpunkte S_V und S_H gehören der starren Ebene S_HE an, in welcher die beiden Punkte S_H und S_V sich immer so bewegen, daß die

Achsen t_H und t_V die Normalen ihrer Bahnkurven sind. Von dem augenblicklichen Pol P_V der Bahnkurve des Vorderrades weiß man zunächst nur, daß er auf der Achse t_V liegen muß. Zur Bestimmung seiner eindeutigen Lage ist es zweckmäßig, für den augenblicklichen Bewegungszustand der gesamten Lenkanordnung ein Ersatzgetriebe aufzustellen.

Das Ersatzgetriebe ist in Abb. 7 dargestellt. Auf den Tangenten t_H und t_V nimmt man beliebig die Gestellpunkte H_0 und V_0 an. Der Punkt S_V wurde wegen einer besseren Darstellung nicht auf der Verbindung ES_H liegend angenommen. Die drei Punkte S_H, S_V, E bilden ebenso wie die drei Punkte EFK je eine starre Ebene. Der Halbmesser MK des Ursprungskreises a wurde als starre um M drehbare Kurbel eingesetzt. Von der Radebene des Vorderrades wird angenommen, daß die Kurbel V_0S_V im Gelenkpunkt S_V mit der Ebene ES_HS_V gelenkig verbunden ist. Es handelt sich nun darum, den augenblicklichen Pol P_V der Ebene GS_V zu bestimmen. Man kann dafür die Verfahren der sog. Polkonfiguration, nach welchen die augenblicklichen Pole aller Zwischenglieder ermittelt werden müssen, anwenden. Da die Pole aber oft außerhalb der Zeichenebene fallen, ist es zweckmäßiger, die gedrehten Geschwindigkeitsvektoren, die immer durch den augenblicklichen Pol gehen, zu benutzen. Dabei wird der wichtige Satz benutzt, daß die Endpunkte der gedrehten Geschwindigkeitsvektoren eine zur ursprünglichen Figur ähnliche Figur bilden.

Nimmt man eine beliebig große, gedrehte Geschwindigkeit v_H des Punktes S_H an (Abb. 7), so findet man den Endpunkt der gedrehten Geschwindigkeit v_V des Punktes S_V als Schnittpunkt der Parallelen durch den Endpunkt von v_H zu S_HS_V mit der Geraden V_0S_V. Der Schnittpunkt der beiden Geschwindigkeiten v_H und v_V ergibt den Pol P_H der Ebene S_HS_V, mit welcher das Hinterrad starr verbunden ist, so daß dieser Pol auch gleichzeitig der Pol des Hinterrades ist. Die Parallele durch den Endpunkt von v_H zu S_HE schneidet die Parallele durch den Endpunkt von v_V zu S_VE im Endpunkt der gedrehten Geschwindigkeit v_E des Punktes E. Der Endpunkt der Geschwindigkeit v_K des Punktes K ergibt sich als Schnittpunkt von KM mit der Parallelen durch den Endpunkt von v_E zu EK. Den Endpunkt der Geschwindigkeit v_F des Punktes F wieder findet man als Schnittpunkt der Parallelen durch den Endpunkt von v_E zu EF mit der Parallelen durch den Endpunkt von v_K zu KF. In der gleichen Weise ergibt sich der Endpunkt von v_G als Schnittpunkt der Parallelen durch den Endpunkt von v_V zu GS_V mit der Parallelen durch den Endpunkt von v_F zu FG. Die beiden gedrehten Geschwindigkeiten v_V und v_G schneiden sich im augenblicklichen Pol P_V der Ebene GS_V des Vorderrades.

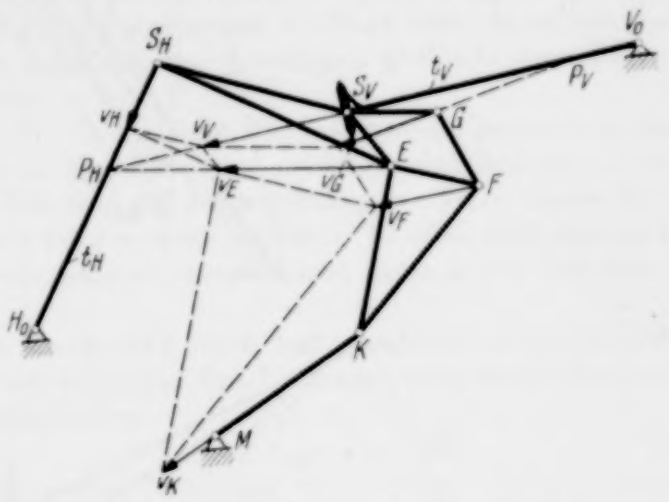


Abb. 7. Ersatzgetriebe der Achsschenkellenkung.

Wenn die beiden Pole P_H und P_V des Hinter- und des Vorderrades bekannt sind, können die Schleppkurven beider Räder wieder als Hüllkurven der einzelnen Krümmungskreise ermittelt werden. Man ermittelt in Abb. 8 zunächst wie in Abb. 7 mit Hilfe der beliebig angenommenen Geschwindigkeit v_{H_1} die Pole P_{H_1} und P_{V_1} auf den Polbahntangenten t_H und t_V. Dann läßt man die Fahrgestellebene ES_H feststehen und verschwenkt relativ zu ihr die Deichsel EK um einen beliebigen Winkel γ nach EK' und mit ihr das Steuergetriebe in die Lage $S_VF'G'E$. Nun muß man sich beliebige Strahlen $K'X_1$, $K'X_2$, $K'X_3$ vorgeben, von denen man annimmt, daß einer von ihnen mit dem Winkel β_1, β_2 oder β_3 die Lage der Deichsel EK_2 zu der Strecke MK_2 kennzeichnet (Abb. 9). Man ermittelt in Abb. 8 mit Hilfe einer wiederum beliebig angenommenen Geschwindigkeit v_{H_2} über die Geschwindigkeiten $v_{K_{2.1}}$, $v_{K_{2.2}}$, $v_{K_{2.3}}$ und über die Geschwindigkeiten $v_{E_{2.1}}$, $v_{E_{2.2}}$, $v_{E_{2.3}}$ sowie $v_{G_{2.1}}$, $v_{G_{2.2}}$, $v_{G_{2.3}}$ die drei entsprechenden Pole $P_{V_{2.1}}$, $P_{V_{2.2}}$, $P_{V_{2.3}}$ auf der Tangente t_V'. Diese Pole überträgt man jetzt mit ihrer Entfernung $S_VP_{V_{2.1}}$, $S_VP_{V_{2.2}}$, $S_VP_{V_{2.3}}$ von Abb. 8 nach Abb. 9 und schlägt um P_{V_1} die Kreisbögen $p_{V_{2.1}}$, $p_{V_{2.2}}$ und $p_{V_{2.3}}$ mit den Halbmessern $P_{V_1}P_{V_{2.1}}$, $P_{V_1}P_{V_{2.2}}$, $P_{V_1}P_{V_{2.3}}$ und um P_{H_1} den Kreisbogen p_{H_2} mit $P_{H_1}P_{H_2}$ als Halbmesser. Nun nimmt man beispielsweise das starre Dreieck $P_{H_2}P_{V_{2.1}}K'$ nach Abb. 8 und läßt in Abb. 9 seine Punkte $P_{V_{2.1}}$ und P_{H_2} auf den Kreisbögen $p_{V_{2.1}}$ und p_{H_2} so lange wandern, bis der Punkt K', der dabei die Kurve f beschreibt, die Lage K_2 auf dem Kreis a einnimmt, wenn also die Kurve f den Kreis a schneidet. Der Punkt $P_{V_{2.1}}$ ist dabei auf dem Kreisbogen $p_{V_{2.1}}$ nach $Q_{V_{2.1}}$ und der Punkt

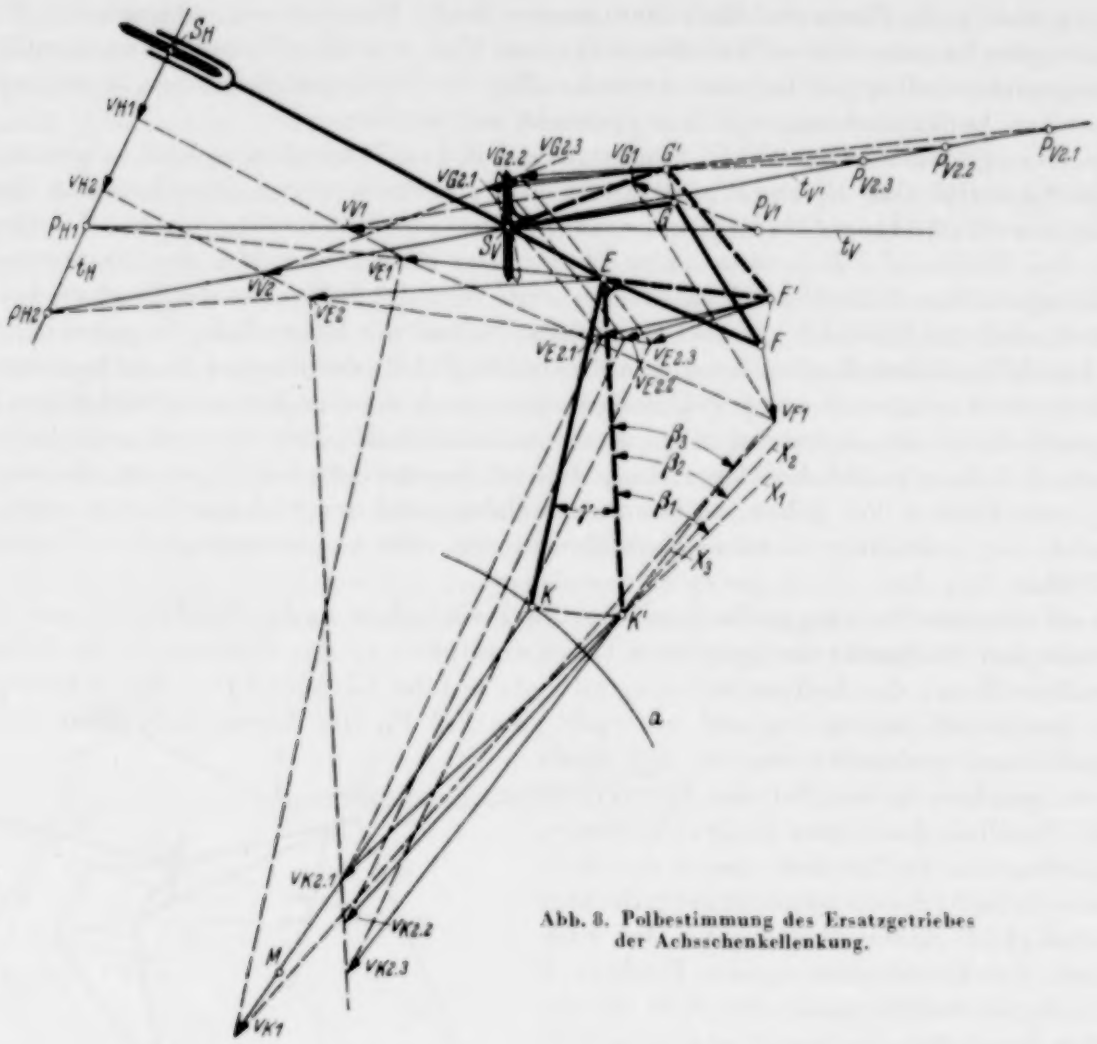


Abb. 8. Polbestimmung des Ersatzgetriebes der Achsschenkellenkung.

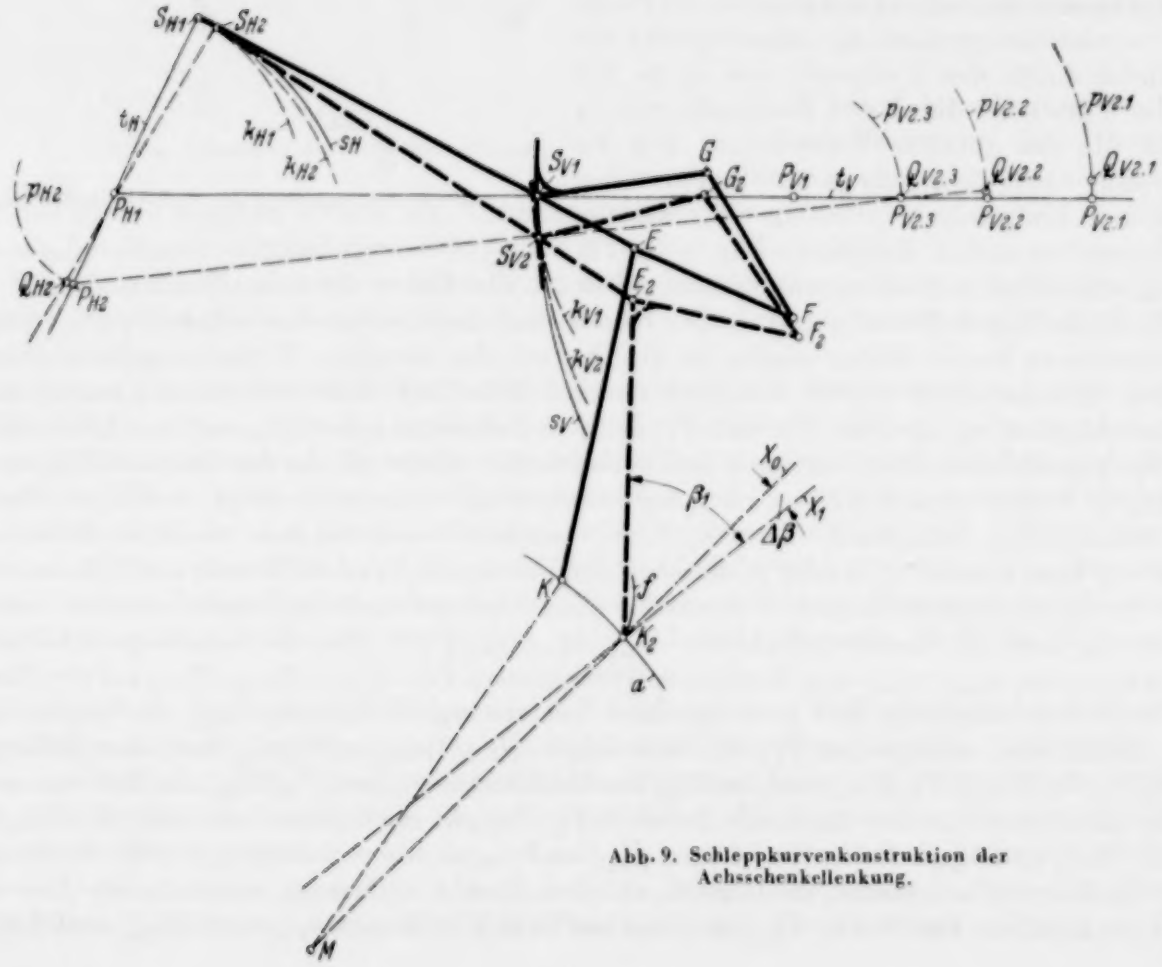


Abb. 9. Schleppkurvenkonstruktion der Achsschenkellenkung.

P_{H_2} auf dem Kreisbogen p_{H_2} nach Q_{H_2} gekommen. Überträgt man nun auch das Dreieck $P_{V_{2.1}} E P_{H_2}$ aus Abb. 8 nach Abb. 9, so erhält man das Dreieck $Q_{V_{2.1}} E_2 Q_{H_2}$. In Abb. 9 schließt die Deichsellage $E_2 K_2$ mit der Geraden $M K_2$ den Winkel $E_2 K_2 X_0$ ein, der aber in Abb. 8 bei der Konstruktion des Drehpoles $P_{V_{2.1}}$ mit $\sphericalangle E K' X_1 = \beta_1$ angenommen wurde. Die beiden Winkel sind in Abb. 9 vergleichsweise eingezeichnet und haben noch eine Differenz von $\Delta\beta$. Sie müssen jedoch beide gleich groß sein. Man muß also die beschriebene Konstruktion für andere Pole $P_{V_{2.2}}$, $P_{V_{2.3}}$ ... mit angenommenen Winkeln β_2, β_3 ... wiederholen. Dabei ergibt sich im Beispiel für den Pol $P_{V_{2.2}}$ der Differenzwinkel $\Delta\beta = 0$ und damit auch die Erfüllung der gestellten Teilaufgabe. Der Pol $P_{V_{2.2}}$ ist in Abb. 9 auf dem Kreisbogen $p_{V_{2.2}}$ nach $Q_{V_{2.2}}$ und der Pol P_{H_2} auf dem Kreisbogen p_{H_2} nach Q_{H_2}, dessen Lage zufällig mit der entsprechenden Lage bei Benutzung des Poles $P_{V_{2.1}}$ zusammenfällt, gewandert.

Die Schleppkurven s_V und s_H des Vorder- und des Hinterrades ergeben sich auch hier als Hüllkurven der Krümmungskreise. Die Kurve s_V also aus dem Krümmungskreis k_{V_1} um P_{V_1} mit $P_{V_1} S_{V_1}$ als Halbmesser, dem Krümmungskreis k_{V_2} um $Q_{V_{2.2}}$ mit $P_{V_{2.2}} S_{V_1}$ als Halbmesser usw... die Kurve s_H aus dem Krümmungskreis k_{H_1} um P_{H_1} mit $P_{H_1} S_{H_1}$ als Halbmesser, dem Krümmungskreis k_{H_2} um Q_{H_2} mit $P_{H_2} S_{H_1}$ als Halbmesser usw.

Zur Bestimmung des weiteren Verlaufes der Schleppkurven verschwenkt man gemäß Abb. 8 die Deichsel um andere Winkel γ und verfährt in der gleichen Weise wie beschrieben, wobei wie bei der einfachen Schleppkurvenkonstruktion die neuen Kreisbögen p_{V_3} und p_{H_3} um den ermittelten Q-Punkt, also z. B. um $Q_{V_{2.2}}$ und Q_{H_2}, mit der entsprechenden Differenz $P_{V_{2.2}} P_{V_3}$ und $P_{H_2} P_{H_3}$ als Halbmesser gezeichnet werden müssen und auf diesen die neuen Pole P_{V_3} und P_{H_3} zu verschieben sind. Die weiteren Krümmungshalbmesser der Schleppkurven zeichnet man dann wie bei der einfachen Schleppkurvenkonstruktion, indem man um den jeweiligen Q-Punkt den Kreisbogen k mit dem jeweiligen Halbmesser PS schlägt.

Wie die Abb. 8 und 9 erkennen lassen, ist für die Gestalt der Schleppkurven besonders die Auslegung des Achsschenkelgetriebes wichtig. Es ist also durchaus denkbar, daß bei der gelenkigen Verbindung des Achsschenkelgetriebes der Deichsel die Formgebung der Teile dieser Verbindung mit Hinsicht auf die Schleppkurvenformen vorgenommen wird, d. h. also, daß man sich die Form der Schleppkurve bei bekannter Ursprungskurve vorgibt und danach die Getriebeabmessungen zu bestimmen hat.

Die dargebotenen Konstruktionen lassen sich sinngemäß auch bei hinterrad- und vierradgelenkten Achsschenkelanhängern anwenden. Es ist dann nur das Ersatzgetriebe unter Berücksichtigung des entsprechenden Lenkgestänges aufzustellen.

(Eingegangen am 14. Januar 1950.)

Anschrift des Verfassers: *K. Hain*, Braunschweig, Juliusstraße 31f.

Institut für Landtechnische Grundlagenforschung der Forschungsanstalt für Landwirtschaft in Braunschweig-Völkenrode.

Luftzumischung zu Abgasstrahlen.

Von E. Sänger.

1. Übersicht. Die üblichen Strahltriebwerke — Raketen, Turbinenstrahltriebwerke, Verpuffungsstrahltriebwerke — zeigen bei den aktuellen Fluggeschwindigkeiten gewisse Mängel, wie geringe Wirkungsgrade, Versagen bei erhöhten Fluggeschwindigkeiten usw. Ferner ist allen diesen Triebwerken mit dem üblichen Propeller-Kolbentriebwerk gemeinsam, daß sie erhebliche Wärmemengen mit den Abgasen unausgenützt entlassen.

Das Staustrahltriebwerk hat keinen Standschub und im Unterschallbereich etwa mit dem Quadrat der Fluggeschwindigkeit anwachsenden Schub, so daß man in vielen Fällen zur Kombination mit andern Strahltriebwerken für Start und Langsamflug gezwungen ist.

Diese Situation gibt Veranlassung zur theoretischen Untersuchung, wieweit sich solche Nachteile durch Luftzumischung zum Abgasstrahl in besonderen Ummantelungen grundsätzlich vermindern lassen.

Das Problem der Schuberhöhung von Strahltriebwerken durch Luftzumischung zum Abgasstrahl wurde durch die Vorschläge von *Mélot*[1] in die Luftfahrttechnik eingeführt. Infolge einer zu allgemeinen Auslegung einiger theoretischer Untersuchungen von *A. Busemann*[2] blieben die Vorschläge bisher ohne praktische Anwendung.

Die folgenden Überlegungen zeigen, daß zwar bei der Unterdruckmischung im Sinne der *Mélot*schen Vorschläge bei den interessierenden Fluggeschwindigkeiten keine Schuberhöhung von technischer Bedeutung auftreten dürfte, daß die Unterdruckmischung aber sehr vielversprechend für ortsfeste Versuchsanlagen und für Sondertriebwerke relativ langsamer Land- und Wasserfahrzeuge ist.

Dagegen erscheint die Anwendung der Überdruckmischung in staustrahlartigen Ummantelungen, in denen Umgebungsluft zum ausgeblasenen Abgasstrahl gemischt wird, bei manchen Luftfahrttriebwerken im Bereich hoher Unterschallgeschwindigkeiten und Überschallgeschwindigkeiten durchaus lohnend.

Die relativen Schuberhöhungen werden um so größer, je höher die Fluggeschwindigkeit und je schlechter der thermische Wirkungsgrad des benützten Strahltriebwerkes an sich ist.

Grundsätzlich mischen sich die vier Energiekomponenten zweier Gasstrahlen so, daß bei gleichbleibender Gesamtenergie die Summe der Enthalpien auf Kosten der Summe der kinetischen Energien wächst, wobei auch die Gesamtentropie zunimmt.

Wenn die Strahlmischung bei höherem, als dem ungestörten Außendruck stattfindet, kann durch anschließende Expansion des Gasgemisches ein Teil der gebildeten Enthalpie in kinetische Energie rückverwandelt und damit nutzbar gemacht werden.

Diese Bedingungen führen zur Kombination des Staustrahltriebwerkes mit anderen Triebwerken in Form staustrahlartiger Ummantelungen und Mischkammern und mit dem Zweck, einen Teil der sonst völlig verlorenen, besonders thermischen Abgasenergien der Kerntriebwerke zur Aufheizung eines zusätzlichen Staustrahltriebwerkes zu benützen.

Da bei dieser Art der Heizung außer thermischer unvermeidlich auch kinetische Energie zugeführt wird, nennen wir dieses Prinzip kurz Impulsheizung des Staustrahltriebwerkes.

Zur Vereinfachung der folgenden theoretischen Untersuchungen setzen wir die Strahlmischung in der Rechnung immer als bei konstantem Druck erfolgend voraus, doch ist praktisch auch die Mischung bei veränderlichem Druck anwendbar, insbesondere in Unterdruckkammern bei steigendem Druck, in Überdruckkammern bei fallendem Druck.

I. Gleichdruckmischung von Gasstrahlen.

2. Theorie der Gleichdruckmischung. Aus einer Mündung vom Querschnitt F_0 tritt ein Gasstrahl mit der Geschwindigkeit v_0 und den übrigen Zustandsgrößen p, ϱ_0, T_0 aus. Er vermischt sich mit der freien Umgebungsluft, die in gleicher Richtung und mit der Geschwindigkeit v_2 strömt und die übrigen Zustandsgrößen p, ϱ_2, T_2 besitzt (Abb. 1).

[1] *H. F. Mélot*, Franz. Patente 522163 (1919; 523427 (1920); 571863 (1922).

[2] *A. Busemann*, Schriften der Deutschen Akademie für Luftfahrtforschung, Heft 1071/43. Berlin 1943.

Für die Vermischung einer bestimmten, sekundlich durch den Querschnitt F_2 strömenden Luftmasse $m_2 = \varrho_2 F_2 v_2$ mit der entsprechenden Abgasmasse $m_0 = \varrho_0 F_0 v_0$ gelten folgende Beziehungen:

Kontinuitätssatz: Die Summe der sekundlich durch die Querschnitte F_2 und F_0 strömenden Massen ist gleich der sekundlich durch den Querschnitt F_x strömenden Masse:

$$\varrho_0 F_0 v_0 + \varrho_2 F_2 v_2 = \varrho_x F_x v_x . \tag{1}$$

Impulssatz: Wegen des durchweg konstanten Druckes bleibt der Gesamtimpuls in jedem Querschnitt gleich:

$$\varrho_0 F_0 v_0^2 + \varrho_2 F_2 v_2^2 = \varrho_x F_x v_x^2 . \tag{2}$$

Energiesatz: Die Summe der sekundlich durch die Querschnitte F_2 und F_0 strömenden Energien ist gleich der sekundlich durch den Querschnitt F_x strömenden Energie, wobei relaxationsfreie Umwandlung von kinetischer Energie in Enthalpie, wie bei Berechnung der Gasdrosselung, vorausgesetzt wird:

$$\varrho_0 F_0 v_0 \left(\frac{v_0^2}{2} + g c_p T_0\right) + \varrho_2 F_2 v_2 \left(\frac{v_2^2}{2} + g c_p T_2\right) = \varrho_x F_x v_x \left(\frac{v_x^2}{2} + g c_p T_x\right). \tag{3}$$

Zustandsgleichung: Die Größen ϱ_x, T_x hängen über dem bekannten, konstanten Mischdruck p zusammen:

$$p = g \varrho_x R T_x . \tag{4}$$

Im Kernstrahl wurde dabei die übliche Rechteckverteilung der Zustandsgrößen über dem Querschnitt mit gleicher Förderung wie die wirkliche Verteilung angenommen. Die Gaskonstanten R und c_p werden für beide zu mischenden Gase näherungsweise als gleich vorausgesetzt. Die Turbulenzdissipation in Enthalpie wird, wie gesagt, trägheitsfrei angenommen.

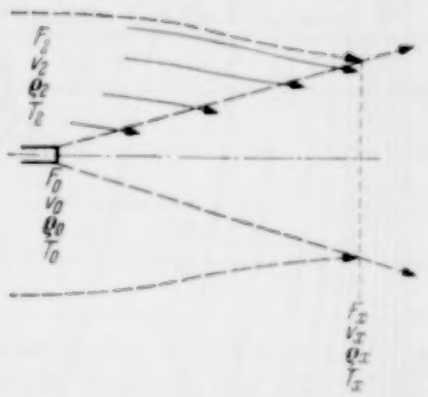


Abb. 1. Freier Mischstrahl in bewegter Umgebungsluft.

Mit diesen vier Gleichungen lassen sich die vier Unbekannten F_x, ϱ_x, v_x, T_x durch die bekannten Größen $F_2, \varrho_2, v_2, T_2, F_0, \varrho_0, v_0, T_0$ ausdrücken.

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden für die bekannten Größen neue Zeichen eingeführt:

Massensumme: $\varrho_0 F_0 v_0 + \varrho_2 F_2 v_2 = M$ [kgsec/m], (5)

Impulssumme: $\varrho_0 F_0 v_0^2 + \varrho_2 F_2 v_2^2 = J$ [kg], (6)

Energiesumme: $\varrho_0 F_0 v_0 (v_0^2/2 + g c_p T_0) + \varrho_2 F_2 v_2 (v_2^2/2 + g c_p T_2) = E$ [kgm/sec], (7)

Temperaturdichte: $p/gR = \varrho_0 T_0 = \varrho_2 T_2 = \varrho_x T_x = D$ [kgsec^{2}0/m^4]. (8)

Damit werden die vier Bestimmungsgleichungen:

$$\varrho_x F_x v_x = M ,$$
$$\varrho_x F_x v_x^2 = J ,$$
$$\varrho_x F_x v_x \left(\frac{v_x^2}{2} + g c_p T_x\right) = E ,$$
$$\varrho_x T_x = D .$$

Aus ihnen folgen die Unbekannten

$$v_x = \frac{J}{M} , \tag{9}$$

$$F_x = \frac{M E - \frac{1}{2} J^2}{g c_p D J} , \tag{10}$$

$$\varrho_x = \frac{g c_p M^2 D}{M E - \frac{1}{2} J^2} , \tag{11}$$

$$T_x = \frac{M E - \frac{1}{2} J^2}{g c_p M^2} \tag{12}$$

und die später gebrauchte Gemischmachzahl

$$\frac{v_x}{a_x} = \sqrt{\frac{2}{\varkappa - 1}\,\frac{1}{2\,M\,E/J^2 - 1}}\,. \tag{12a}$$

3. Propulsiver Mischungswirkungsgrad. Das Verhältnis der sekundlich durch F_x abfließenden kinetischen Energie zur insgesamt zugeflossenen kinetischen Energie beträgt

$$\eta_{jm} = \frac{\varrho_x\, F_x\, v_x^3}{\varrho_0 F_0 v_0^3 + \varrho_2 F_2 v_2^3} = \frac{J^2/M}{2E - 2\,g\,c_p\,(\varrho_0 F_0 v_0 T_0 + \varrho_2 F_2 v_2 T_2)} = \frac{\left(1 + \dfrac{m_2 v_2}{m_0 v_0}\right)^2}{\left(1 + \dfrac{m_2}{m_0}\right)\left(1 + \dfrac{m_2 v_2^2}{m_0 v_0^2}\right)} \tag{13}$$

ist also nur eine Funktion der beiden Verhältnisse m_2/m_0 und v_2/v_0.

Der propulsive Mischungswirkungsgrad hängt weder vom Druck p ab, bei dem die Mischung stattfindet, noch von den Dichten, Temperaturen, Enthalpien oder Machzahlen der beteiligten Gemischpartner oder von der Relaxation der Wirbelverwandlung in Wärme. Die bei der Mischung verschwindenden kinetischen Energien verwandeln sich über Wirbelbewegung in zusätzliche Enthalpie wie beim Vorgang der Gasdrosselung.

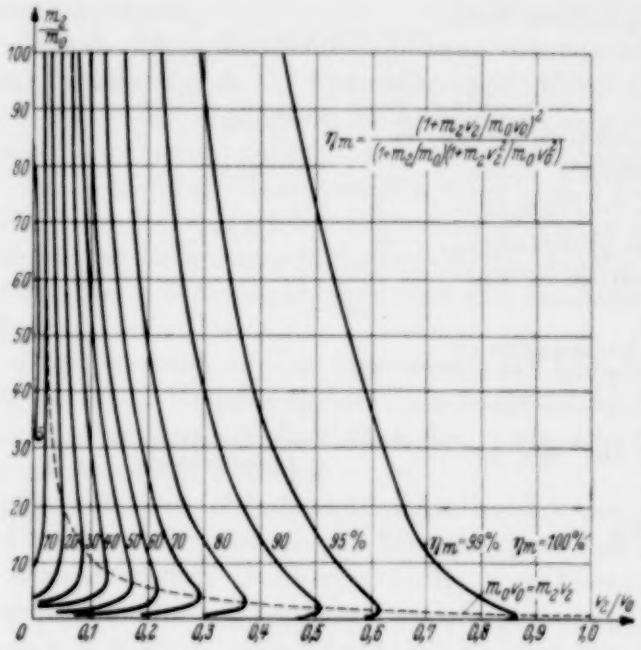


Abb. 2. Propulsiver Mischungswirkungsgrad der Gleichdruckmischung.

Der Mischungswirkungsgrad wird natürlich für $m_2/m_0 \to 0$ und $m_2/m_0 \to \infty$ gleich $\eta_{jm} = 1$, da beim Verschwinden eines der beiden Gemischpartner keine Mischung und daher auch keine Mischungsverluste mehr möglich sind.

Der Mischungswirkungsgrad wird für $v_2/v_0 = 0$, d. h. Mischung mit ruhender Umgebungsluft, gleich $\eta_{jm} = 1/(1 + m_2/m_0) = m_0/m_x$, also bei praktisch verwendeten Mischungsverhältnissen sehr klein, die Strahlenenergie verwandelt sich fast restlos in Wirbel und Wärme.

Der Mischungswirkungsgrad wird ferner mit $v_2/v_0 = 1$ gleich $\eta_{jm} = 1$, d. h. wenn beide Gasstrahlen gleiche und gleichgerichtete Geschwindigkeit haben, geht die Vermischung durch Diffusion ohne Verluste an kinetischer Energie vor sich, auch wenn die Temperaturen beider Strahlen verschieden sind.

Im Bereich beliebiger Werte von m_2/m_0 und v_2/v_0 zeigen die Mischungswirkungsgrade Minima, die bei um so höheren Werten von m_2/m_0 liegen, je kleiner v_2/v_0 ist und deren Verlauf sich ausrechnen läßt zu $m_2/m_0 = v_0/v_2$, d. h. die Verluste werden am größten, wenn beide Strahlimpulse zunächst gleich sind. Der Verlauf ist in Abb. 2 erkennbar.

Wenn die beizumischenden Gase von vornherein merkbare Geschwindigkeiten in Richtung des Gasstrahles haben, sind die Mischungswirkungsgrade durchwegs beträchtlich und um so höher, je mehr Gase beigemischt werden, sofern $m_2/m_0 > v_0/v_2$ ist. Nur bei sehr kleinen v_2/v_0 oder m_2/m_0 kehrt sich diese Regel um, d. h. der Wirkungsgrad wird dann mit zunehmender Beimischung solange schlechter, bis $m_0 v_0 = m_2 v_2$ ist, um dann wieder anzusteigen.

Da bei Mischungswirkungsgraden unter 1 auch bei gleicher Temperatur beider Strahlen Erwärmung des Mischgases eintritt, wirkt die Impulszufuhr immer auch als Heizung.

Für die Gemischmachzahl gilt

$$\frac{1 + \dfrac{2}{\varkappa - 1}\dfrac{a_x^2}{v_x^2}}{1 + \dfrac{2}{\varkappa - 1}\dfrac{a_2^2}{v_2^2}} = \frac{1 + \dfrac{m_2}{m_0}}{\left(1 + \dfrac{m_2 v_2}{m_0 v_0}\right)^2}\left(\frac{m_2 v_2^2}{m_0 v_0^2} + \frac{1 + \dfrac{2}{\varkappa - 1}\dfrac{a_0^2}{v_0^2}}{1 + \dfrac{2}{\varkappa - 1}\dfrac{a_2^2}{v_2^2}}\right) = \frac{1}{\eta_{jm}} \cdot \frac{\dfrac{m_2 v_2^2}{m_0 v_0^2} + \dfrac{1 + \dfrac{2}{\varkappa - 1}\dfrac{a_0^2}{v_0^2}}{1 + \dfrac{2}{\varkappa - 1}\dfrac{a_2^2}{v_2^2}}}{\dfrac{m_2 v_2^2}{m_0 v_0^2} + 1} \tag{12b}$$

Sie ist also Funktion der Massen-, Geschwindigkeits- und Machzahl-Verhältnisse der Komponenten. Wenn das Komponentenmachzahlverhältnis Eins wird, ist das oben definierte Verhält-

nis des Luftmachzahlausdruckes zum Gemischmachzahlausdruck gleich dem Mischungswirkungsgrad.

4. Diskussion von Sonderfällen. Die Besprechung der Grenzfälle des Mischungswirkungsgrades läßt sich auf die übrigen Mischstrahleigenschaften ausdehnen und führt zu bemerkenswerten Eigenschaften.

Der praktisch häufige Sonderfall $v_2/v_0 = 0$, also ruhendes Zumischgas, gibt wegen der verschwindenden achsparallelen Geschwindigkeitskomponente des Zumischgases ohne weiteres $F_2 = \infty$, da nur dann Kontinuitäts- und Impulssatz gleichzeitig erfüllt sein können, wenn Mischung überhaupt eintritt, also $\varrho_x F_x v_x \neq \varrho_0 F_0 v_0$ ist. Man kann nunmehr F_x als willkürlich wählbare, unabhängig Veränderliche betrachten und als gegeben voraussetzen, da zu jedem beliebigen F_x ein $F_2 = \infty$ gehört.

Aus den Gleichungen (1) bis (4) folgt die vorerst unbestimmte Größe

$$\frac{F_2 v_2}{F_0 v_0} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\frac{\varkappa-1}{2}\frac{v_0^2}{a_0^2}+\frac{T_2}{T_0}+1\right)^2+4\frac{T_2}{T_0}\left(\frac{F_x}{F_0}-1\right)}-\left(\frac{\varkappa-1}{2}\frac{v_0^2}{a_0^2}+\frac{T_2}{T_0}+1\right)\right] \tag{14}$$

und damit ohne weiteres die unbekannten Größen v_x, ϱ_x, T_x aus den Gleichungen (9), (11) und (12).

Ein noch engerer, praktisch nicht seltener Sonderfall ist $v_2/v_0 = 0$ und $T_2/T_0 = 1$. Wegen der durchwegs gleichen Drücke p ist dann auch $\varrho_2/\varrho_0 = 1$ und die unbestimmte Größe $F_2 v_2$ wird

$$\frac{F_2 v_2}{F_0 v_0} = \sqrt{\left(\frac{\varkappa-1}{4}\frac{v_0^2}{a_0^2}+1\right)^2+\left(\frac{F_x}{F_0}-1\right)}-\left(\frac{\varkappa-1}{4}\frac{v_0^2}{a_0^2}+1\right) \tag{14a}$$

und damit weiter die Unbekannten aus (9), (11) und (12)

$$\frac{v_x}{v_0} = \frac{1}{1+F_2 v_2/F_0 v_0}, \qquad \frac{T_x}{T_0} = 1+\frac{\varkappa-1}{2}\frac{v_0^2}{a_0^2}\frac{\frac{F_2 v_2}{F_0 v_0}}{\left(1+\frac{F_2 v_2}{F_0 v_0}\right)^2}, \qquad \frac{\varrho_x}{\varrho} = \frac{T}{T_x}.$$

Im Mischstrahl sind Temperatur und Dichte also durchaus verschieden von den unter sich gleichen Werten der Gase vor der Mischung, die Strahlmischung wirkt heizend, wie eine schlierenoptische Beobachtung zeigen würde.

Ein dritter Sonderfall ergibt sich mit $v_2 = v_0$.

$$M = v_0(\varrho_0 F_0 + \varrho_2 F_2),$$
$$J = v_0^2(\varrho_0 F_0 + \varrho_2 F_2),$$
$$E = v_0^2\left[\varrho_0 F_0\left(\frac{v_0^2}{2}+g\,c_p\,T_0\right)+\varrho_2 F_2\left(\frac{v_2^2}{2}+g\,c_p\,T_2\right)\right],$$
$$D = \varrho_0 T_0 = \varrho_2 T_2$$

wird mit Hilfe von (9) bis (12):

$v_x = v_0$, die Strömungsgeschwindigkeit bleibt auch nach der Mischung gleich;

$F_x = F_0 + F_2$, die Strömungsquerschnitte addieren sich;

$\varrho_x = \frac{\varrho_0 F_0 + \varrho_2 F_2}{F_0 + F_2}$, die Dichten mischen sich nach den Massen;

$T_x = \frac{\varrho_0 F_0 T_0 + \varrho_2 F_2 T_2}{\varrho_0 F_0 + \varrho_2 F_2}$, die Temperaturen mischen sich nach den Enthalpien.

Ähnlich lassen sich alle übrigen Sonderfälle der Gasstrahlmischung aus Abschn. **2** ableiten.

5. Die Gleichdruck-Mischkammer. Die in Abschn. **2** und **3** behandelte freie Strahlmischung vollzieht sich in gleicher Weise auch in einer geschlossenen Mischkammer, wenn die Kammerwände die Form der in Abb. 1 angedeuteten Stromlinien des zugemischten Gases haben. In diesem Fall läßt sich auch das Mischungsverhältnis m_2/m_0 willkürlich begrenzen. Wegen des gleichbleibenden Druckes im Zumischgas bleibt auch dessen Strömungsgeschwindigkeit, Temperatur und Dichte in der Mischkammer vor Eintritt der Mischung konstant.

Die jeweiligen, meist abnehmenden Mischkammer-Querschnittsflächen F errechnen sich daher sehr einfach aus der abnehmenden Menge des Zumischgases. An jener Stelle der Mischkammerachse, die durch den Mischquerschnitt

$$F_\xi = \frac{M_{(\xi)} E_{(\xi)} - \frac{1}{2} J_\xi^2}{g\, c_p D J_{(\xi)}}$$

bestimmt ist, beträgt der Mischkammerquerschnitt nach dem Kontinuitätssatz

$$F = F_{(\xi)} + F_{2(x)} - F_{2(\xi)}, \tag{15}$$

wobei die Bezeichnungen der Abb. 3 verwendet sind und die Kurzzeichen sinngemäß die Bedeutung von Abschn. 2 haben.

Der unabhängige Parameter $F_{2(\xi)}$ kann zwischen F_0 und $F_{2(x)}$ beliebig gewählt werden und ergibt jeweils einen Mischkammerquerschnitt F.

Während sich somit die Mischkammerquerschnitte einfach und eindeutig ausrechnen lassen, ist die wirkliche Meridianform, d. h. die Zuordnung dieser Querschnitte zu bestimmten Punkten der Geräteachse nur auf Grund empirischer Erfahrungen über den wirklichen Mischstrahl-Öffnungswinkel, die Meridianform des Mischstrahles, der Geschwindigkeitsverteilung in ihm, der Schnelligkeit der Turbulenzdissipation usw. festlegbar.

Ohne Kenntnis der Ergebnisse derartiger Versuche kann zunächst mit homogener Geschwindigkeitsverteilung in einem kreiskegeligen Strahl von etwa 10 bis 14 Grad gesamtem Öffnungswinkel gerechnet werden.

Ein weiteres, wichtiges Forschungsproblem der Mischkammer entsteht bei der Anwendung sehr heißer Kernstrahlen, wie sie beispielsweise aus Raketen anfallen und wo die sehr starke ther-

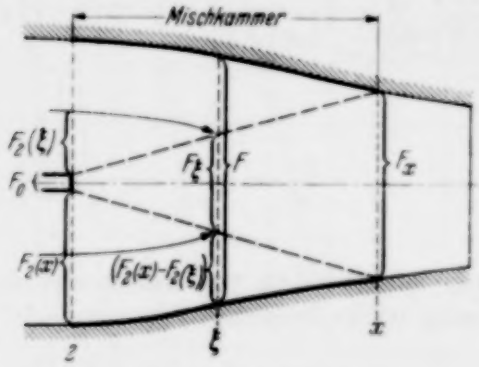


Abb. 3. Gleichdruck-Mischkammer.

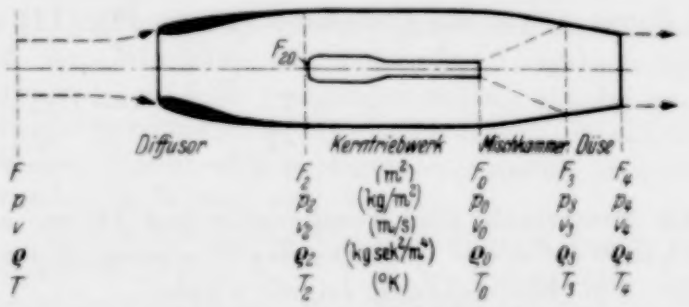


Abb. 4. Staustrahltriebwerk mit Impulsheizung.

mische Dissoziation, die über die Hälfte der dem Kerntriebwerk zugeführten Energie gebunden enthalten kann, bei der Mischung mit Umgebungsluft zurückgeht und dadurch den Mischstrahl zusätzlich sehr stark aufheizen wird.

Wieweit die Mischung durch besondere Leitflächen im Mischstrahl beschleunigt werden kann, wäre besonders zu klären.

Wie erwähnt, wurde bei der vorliegenden Betrachtung ferner vorausgesetzt, daß die bei der Strahlmischung zunächst in Wirbelenergie verwandelte kinetische Energie sich noch innerhalb der Mischkammer praktisch vollständig in Wärme weiterverwandelt. Dieser, im wesentlichen durch innere Reibung bewirkte Vorgang wird durch die großen auftretenden Geschwindigkeitsunterschiede, die hohe Zähigkeit der heißen Feuergase und die gleichzeitig ablaufenden chemischen Reaktionen sehr beschleunigt, so daß es berechtigt erscheint, wie bei der üblichen Gasdrosselung zu rechnen, doch steht die experimentelle Bestätigung noch aus.

Wie die später durchgerechneten Beispiele zeigen, ist diese Annahme ungünstig für Unterdruckmischkammern, von geringem Einfluß für Überdruckmischkammern, die aus Triebwerken kleinen inneren Wirkungsgrades beheizt werden, und günstig für Überdruckmischkammern, die durch Triebwerke hohen inneren Wirkungsgrades beheizt werden.

II. Schuberhöhung von Strahltriebwerken durch Luftzumischung zum Abgasstrahl.

6. Theorie der Schuberhöhung. Es gilt: Kernschub:

$$P_0 = \varrho_0 F_0 v_0^2 - \varrho_2 F_{20} v_2^2 .$$

Gesamtschub:

$$P = \varrho_4 F_4 v_4^2 - \varrho F v^2 ,$$

Faktor der Schubaufteilung:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\varrho_4 F_4 v_4^2 - \varrho F v^2}{\varrho_0 F_0 v_0^2 - \varrho_2 F_{20} v^2} .$$

Von den in Abb. 4 eingezeichneten charakteristischen Größen sind zunächst 14 unbekannt:

$$F, \quad v_2, \varrho_2, T_2,$$
$$F_3, p_3, \quad v_3, \varrho_3, T_3,$$
$$F_4, p_4, \quad v_4, \varrho_4, T_4.$$

Die Größe p_2 wird als bekannt angenommen, da sie von vornherein durch konstruktive Annahmen willkürlich in gewissen Grenzen wählbar ist.

An Strömungsgleichungen stehen zur Verfügung:

Zone $F - F_2$: Kontinuitäts- und Energiesatz, Adiabatengleichung und Gasgleichung,

Zone $F_2 - F_3$: Siehe Abschn. 2, wobei für das dortige F_2 hier $F_2 - F_{20}$ zu setzen ist; verwendet werden die Gleichungen (9), (10), (11), (12) und die Beziehung der Gleichdruckmischung $p_3 = p_2$;

Zone $F_3 - F_4$: Kontinuitäts- und Energiesatz, Adiabatengleichung und Gasgleichung und die Entspannungsbedingung $p_4 = p$.

Damit liegen für die 14 Unbekannten gleichviel Bestimmungsgleichungen vor. Zu berechnen sind die im Schubfaktor P/P_0 auftretenden unbekannten Größen ϱ_4, v_4, F_4, v_2 aus den gegebenen Größen $p_2, p, v, \varrho, T, F_0, p_0, v_0, \varrho_0, T_0, F_{20}, F_2$.

Aus den Strömungsgleichungen der ersten Zone folgen die Beziehungen

$$\varrho_2 = \varrho \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}, \tag{16}$$

$$T_2 = \frac{p_2}{\varrho g R} \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}. \tag{17}$$

$$v_2 = \sqrt{v^2 + 2 g c_p T \left[1 - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right]}, \tag{18}$$

$$F = F_2 \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{1 + \frac{2 g c_p T}{v^2} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right]}. \tag{19}$$

Damit werden die Kurzzeichen aus bekannten Größen für (5) bis (8)

Massensumme $$M = \varrho_0 F_0 v_0 + \varrho (F_2 - F_{20}) \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{v^2 + 2 g c_p T \left[1 - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right]} \ [\mathrm{kg\,sec/m}], \tag{5a}$$

Impulssumme $$J = \varrho_0 F_0 v_0^2 + \varrho (F_2 - F_{20}) \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \left| v^2 + 2 g c_p T \left[1 - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right] \right| \ [\mathrm{kg}], \tag{6a}$$

Energiesumme $$E = \varrho_0 F_0 v_0 \left(\frac{v_0^2}{2} + g c_p T_0\right) +$$
$$+ \varrho (F_2 - F_{20}) \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{v^2 + 2 g c_p T \left[1 - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right]} \left(\frac{v^2}{2} + g c_p T\right) [\mathrm{kgm/sec}], \tag{7a}$$

Temperaturdichte $$D = \frac{p_2}{gR} \ [\mathrm{kg\,sec^2\,^0/m^4}] \tag{8a}$$

und schließlich die unmittelbar gebrauchten Unbekannten selbst

$$\varrho_4 = g c_p \frac{M^2 D}{M E - \frac{1}{2} J^2} \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \ [\mathrm{kg\,sec^2/m^4}], \tag{20}$$

$$T_4 = \frac{M E - \frac{1}{2} J^2}{g c_p M^2} \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \ [^0\mathrm{K}], \tag{21}$$

$$v_4 = \sqrt{\frac{J^2}{M^2} + 2 \frac{M E - \frac{1}{2} J^2}{M^2} \left[1 - \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{1}}\right]} \ [\mathrm{m/sec}], \tag{22}$$

$$F_4 = \frac{\left(\dot{M}E - \frac{1}{2}J^2\right)\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}}{g\,c_p\,D\sqrt{J^2 + 2\left(\dot{M}E - \frac{1}{2}J^2\right)\left[1 - \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}}\ [m^2]. \tag{23}$$

Damit läßt sich endlich der gesuchte Faktor der Schubaufteilung anschreiben zu

$$\left.\begin{aligned}\frac{P}{P_0} &= \frac{\varrho_4 F_4 v_4^2 - \varrho F v^2}{\varrho_0 F_0 v_0^2 - \varrho_2 F_{20} v_2^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2\dot{M}E\left[1 - \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right] + J^2\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}} - \varrho F_2 v^2\sqrt{1 + \frac{2g\,c_p\,T}{v^2}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}}{\varrho_0 F_0 v_0^2 - \varrho F_{20} v^2\left\{1 + \frac{2g\,c_p\,T}{v^2}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]\right\}\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}},\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

7. Diskussion der Schuberhöhung. Der Schubfaktor P/P_0 bedeutet nicht ohne weiters die Schuberhöhung eines Strahltriebwerkes durch Hinzufügung der Ummantelung unter sonst gleichen Umständen. Vielmehr beschreibt er zunächst die Aufteilung des Schubes auf Kerntriebwerk und Mantel bei dem betreffenden Flugzustand ϱ, v.

Das Kerntriebwerk könnte jedoch bei diesem Flugzustand ohne Mantel einen wesentlich anderen Schub als mit dem Mantel haben. Praktisch wird der Fall nicht selten so liegen, daß der Kerntriebwerksschub ohne Mantel wesentlich kleiner oder sogar Null ist, so daß die tatsächliche Schuberhöhung bei einem bestimmten Flugzustand durch Hinzufügung des Mantels viel größer als P/P_0, ja sogar unendlich sein kann. Dieser Fall tritt z. B. bei Verpuffungsstrahlrohren und hohen Fluggeschwindigkeiten ein. Anderseits kann sich der Kerntriebwerksschub durch Hinzufügen des Mantels auch vermindern, wie bei Raketen, wenn auch dieser Effekt oft vernachlässigbar klein bleiben wird. Im letzteren besonderen Fall bedeutet P/P_0 dann tatsächlich die Schuberhöhung des bloßen Kerntriebwerkes durch Anfügen des Mantels.

Der physikalisch technische Sinn der Gleichung (24) wird durch Erörterung einiger Sonderfälle noch deutlicher werden.

a) Sonderfall $v = 0$, d. h. Schub im Stand. Gleichung (24) spezialisiert sich zu der Form

$$\left.\begin{aligned}\frac{P}{P_0} = &\frac{\sqrt{\frac{\varrho_0 F_0 v_0}{2g\,c_p\,T_0}}}{\frac{\varkappa-1}{2}\,\underbrace{\frac{\varrho F_0 v_0^2}{a_0}}\,\underbrace{-\frac{\varrho\,F_{20}\,T}{T_0}\left[\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} - \left(\frac{p_2}{p}\right)\right]}}\cdot \\ &\cdot\Bigg\{\varrho_0 F_0 v_0\left[\frac{\varkappa-1}{2}\frac{v_0^2}{a_0^2} + 1 - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}}\right] + \\ &+\varrho(F_2 - F_{20})\sqrt{2g\,c_p\,T\left[\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}\right]\left[\frac{\varkappa-1}{2}\frac{v_0^2}{a_0^2} + 1 + \frac{T}{T_0}\right]\left[1 - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}}\right]} + \\ &+2\varrho\,(F_2 - F_{20})\,v_0\,\frac{T}{T_0}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}}\left[\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} - \left(\frac{p_2}{p}\right)\right]\Bigg\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\right\} \tag{24a}$$

Mit $p_2/p > 1$ wird die Lösung imaginär, dieser Fall ist, wie ohne weiteres verständlich, physikalisch nicht realisierbar. Mit $p_2/p = 1$ wird $P/P_0 = 1$, es liegt derselbe Fall wie bei der Strahlmischung mit freier Umgebungsluft vor, eine Schuberhöhung tritt nicht ein.

Mit $p_2/p < 1$ sind zunächst reelle Lösungen mit $P/P_0 > 1$ möglich, solange die Summe der drei Glieder unter der großen Wurzel positiv bleibt. Da der Ausdruck $\left[1 - (p_2/p)^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}}\right]$ immer negativ ist, wird das zweite Glied immer negativ sein und auch das erste wird dann negativ, wenn die Enthalpie des Kernstrahles groß gegen seine kinetische Energie ist, also die Machzahl v_0/a_0 klein ist. Man versteht sofort, daß es im Stand auch bei $p_2 < p$ Fälle gibt, in denen die Strömung physikalisch nicht realisierbar ist, durch folgende Überlegung:

Aus der elementaren gasdynamischen Beziehung

$$\frac{p}{p_2} = \left(1 + \frac{v_2^2}{2g\,c_p\,T_2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} = \left(1 + \frac{\varkappa-1}{2}\frac{v_2^2}{a_2^2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}$$

folgt, daß das Druckverhältnis der Strömung aus der Ruhe oder in die Ruhe nur von der Machzahl abhängt. Wenn beispielsweise $v_3^2/a_3^2 < v_2^2/a_2^2$ wird, d. h. wenn beim Mischvorgang die Enthalpie stärker als die kinetische Energie zunimmt, also die Machzahl sinkt, dann kann nach der Gleichdruckmischung der höhere Außendruck überhaupt nicht mehr erreicht werden. Dieser Fall wird bei der Mischung heißer, langsamer Feuergasstrahlen mit kalter Luft praktisch gar nicht selten sein, besonders wenn noch Rückdissoziation eintritt.

Allgemein wird die Schubsteigerung im Stand Null sein, also $P = P_0$, wenn

$$\frac{p}{p_2} \leq \left(\frac{P_0^2 - 2\,ME}{J^2 - 2\,ME}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \quad \text{oder} \quad v_2 \leq \sqrt{g c_p T_2 \frac{J^2 - P_0^2}{ME - \frac{J^2}{2}}};$$

d. h. man wird u. U. mit sehr hohen Mischkammer-Zustromgeschwindigkeiten v_2 arbeiten müssen, um hohe Mischungswirkungsgrade zu erzielen, wenn man auf Standschub Wert legt. Das für den Standschub optimale v_2 läßt sich über p_2/p aus der Gleichung für P/P_0 sofort ermitteln.

Mit Hilfe der Gleichung (12a) findet man allgemein, daß bei einem von Eins verschiedenen Wirkungsgrad η_D des Enddiffusors der ungestörte Außendruck p dann wieder erreichbar ist, wenn

$$\frac{\frac{v_0}{a_0}}{\frac{v_2}{a_2}} \geq \sqrt{\frac{\frac{2}{\varkappa-1}\frac{a_2^2}{v_2^2}}{\frac{\left(\frac{m_2 v_2}{m_0 v_0}+1\right)^2}{\frac{m_2}{m_0}+1}\left[\frac{\frac{\varkappa-1}{2}\frac{v_2^2}{a_2^2}+1}{\frac{\varkappa-1}{2}\frac{v_2^2}{a_2^2}+1-\left(\frac{p-\Delta p}{p-\frac{\Delta p}{\eta_D}}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}\right] - \frac{m_2 v_2^2}{m_0 v_0^2}\left(1+\frac{2}{\varkappa-1}\frac{a_2^2}{v_2^2}\right)+1}} \tag{12c}$$

b) Sonderfall $v_0 = 0$, d. h. impulslose Wärmezufuhr, wobei der Standschub ohne weiteres Null wird, wie vom normalen Staustrahltriebwerk her bekannt ist.

Die Wirkung der Brennstoffeinspritzung als Kerntriebwerk wird in diesem Fall meist vernachlässigbar sein, d. h. der Kernschub P_0 wird gleich Null.

Für den reinen Staustrahlschub folgt dann mit

Gleichung (5a): $$M = M_0 + \varrho F_2 \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{v^2 + 2 g c_p T \left[1 - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]},$$

Gleichung (6a): $$J = \varrho F_2 \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \left\{v^2 + 2 g c_p T \left[1 - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]\right\},$$

Gleichung (7a): $$E = M_0 g H + \varrho F_2 \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{v^2 + 2 g c_p T \left[1 - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]} \left(\frac{v^2}{2} + g c_p T\right),$$

wenn M_0 die Masse des zugesetzten Brennstoffes und H dessen Heizwert in kgm/kg, aus (24)

$$P = \sqrt{2\,ME\left[1 - \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right] + J^2\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}} - \varrho F_2 v^2 \sqrt{1 + \frac{2 g c_p T}{v^2}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]} \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}.$$

Diese Formel läßt sich mit den bekannten Annahmen $F_2/F \to \infty$, $M_0 \to 0$ in die seinerzeit gegebene einfache Näherungsformel für den Schub des Staustrahltriebwerkes

$$P = \varrho F v^2 \left(\sqrt{\frac{T_3}{T_2}} - 1\right)$$

überführen. Von der genauen Berechnung des Staustrahltriebwerkes nach ZWB—UM 3509 (NACA-Techn. Mem. 1106) unterscheidet sie sich noch durch die konstanten spezifischen Wärmen.

c) Sonderfall $T = T_0$ ohne weitere Besonderheiten.

d) Sonderfall $(F_2 - F_2) = 0$. Mit $M = \varrho_0 F_0 v_0$, $J = \varrho_0 F_0 v_0^2$, $E = \varrho_0 F_0 v_0 \left(\frac{v_0^2}{2} + g c_p T_0\right)$ wird

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\varrho_0 F_0 v_0^2 \sqrt{1 + \frac{2 g c_p T_0}{v_0^2}\left[1 - \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]} - \varrho F_2 v^2 \sqrt{1 + \frac{2 g c_p T}{v^2}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}}}{\varrho_0 F_0 v_0^2 - \varrho F_{20} v^2 \left\{1 + \frac{2 g c_p T}{v^2}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]\right\}\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}}.$$

Es bleibt also nach Wegfall der Zumischluft im allgemeinen noch eine Schuberhöhung übrig, die aus dem Rechenansatz folgt, da der Schub P_0 des Kerntriebwerkes auf die mäßige Strömungsgeschwindigkeit im Innern des Mantels bezogen wurde und durch die höhere Fluggeschwindigkeit zusätzliche nützliche Druckgefälle entstehen. Erst mit auch $p = p_0$ wird schließlich $P/P_0 = 1$, z. B. bei Raketen als Kerntriebwerk, wenn mit $F_{20} = 0$ auch $p/p_2 = 1$ wird.

e) Abhängigkeit des P/P_0 von F_2. In (24) werden im Ausdruck

$$\sqrt{2 M E\left[1 - \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right] + J^2\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}$$

die in F_2 quadratischen Glieder gleich dem zweiten Zählerglied $\varrho F v^2$, verschwinden also für sehr große F_2, so daß P/P_0 dann für sehr kleine v/v_0 etwa proportional $\sqrt{F_2}$, also proportional der Wurzel aus der Zumischmasse wird, während sonst P/P_0 sogar unabhängig von F_2 und der Zumischmasse einem festen Grenzwert zustrebt.

Dieses Verhalten ist aus der elementaren Theorie sowohl des *Melot*-Gerätes, wie des Staustrahlgerätes bekannt.

Man kann durch Vergrößerung von F_2 den Schub im allgemeinen nicht unbegrenzt, sondern nur bis zu einem festen Grenzwert steigern. Nur bei der Fluggeschwindigkeit Null wächst er theoretisch mit $\sqrt{F_2}$ ohne Grenzen.

f) Abhängigkeit des P/P_0 von p/p_2. Für $p/p_2 = 1$ tritt in keinem Fall Schuberhöhung ein, Gleichung (24) liefert $P/P_0 = 1$. Für $p/p_2 < 1$ entstehen durchwegs reelle Werte für P/P_0, die größer als Eins sind, wie immer auch Fluggeschwindigkeit v, Verhältnisse der Massen, Geschwindigkeiten oder Temperaturen sein mögen. Es gibt unter diesen Umständen daher keinen Bereich der Fluggeschwindigkeit oder der sonstigen Arbeitsbedingungen, in dem die Ummantelung ihre schubverbessernde Wirkung verlieren würde.

Für $p/p_2 > 1$ ändert sich die Sachlage völlig. Es sind hier Fälle mit $P/P_0 \gtrless 1$, auch solche mit $P/P_0 \leq 0$ möglich. Das für den Schub hauptverantwortliche Glied

$$\varrho_4 F_4 v_4^2 = M \sqrt{\frac{J^2}{M^2} + 2\,\frac{M E - \frac{J^2}{2}}{M^2}\left[1 - \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}$$

enthält unter der Wurzel zwei Energiebeträge, die am Ende F_3 der Mischkammer vorhandene gesamte kinetische Energie J^2/M^2 und die während des Expansionsvorganges in der Ausströmdüse zwischen F_3 und F_4 aus der in F_3 vorhandenen Gesamtenthalpie $2\,\frac{\left(M E - \frac{1}{2} J^2\right)}{M^2}$ entstehende weitere kinetische Energie, wenn $p/p_2 < 1$, oder in Enthalpie rückverwandelte kinetische Energie, wenn $p/p_2 > 1$ ist, also Kompressionsströmung vorliegt, wie hier zu betrachten ist.

Wenn p/p_2 zwar schon größer als Eins, aber noch so klein ist, daß bei der Verdichtungsströmung so wenig kinetische Energie

$$2\,\frac{M E - \frac{1}{2} J^2}{M^2}\left[1 - \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]$$

verbraucht wird, daß noch

$$(\varrho_4 F_4 v_4^2 - \varrho F v^2) - (\varrho_0 F_0 v^2 - \varrho_2 F_{20} v_2^2) > 1$$

bleibt, dann erhalten wir wieder einen positiven Schubgewinn $P/P_0 > 1$.

Wenn p/p_2 gerade so groß ist, daß

$$\sqrt{2 M E\left[1 - \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right] + J^2\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}} - \varrho F_2 v^2 \sqrt{1 + \frac{2 g c_p T}{v^2}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]} =$$

$$= \varrho_0 F_0 v_0^2 - \varrho F_{20} v^2 \left\{1 + \frac{2 g c_p T}{v^2}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]\right\}\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}.$$

dann verschwindet der Schubgewinn eben, d. h. $P/P_0 = 1$.

Wenn p/p_2 weiter wächst, wird die linke Seite der vorstehenden Gleichung kleiner als die rechte, es tritt durch den Mantel ohne weiteres Schubverlust ein, d. h. $P/P_0 < 1$.

Wenn p/p_2 weiterhin vergrößert wird, etwa bis

$$\sqrt{2\,ME\left[1-\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]+J_2\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}} = \varrho F_2 v^2 \sqrt{1+\frac{2\,g\,c_p\,T}{v^2}\left[1-\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}$$

ist, dann wird der Kerntriebwerksschub durch die Mantelvorgänge gerade aufgebraucht, es bleibt $P/P_0 = 0$, der Gesamtschub der Anordnung wird Null.

Alle diese Fälle sind konstruktiv durchaus realisierbar und wohl auch schon realisiert worden, wie die zahlreichen Mißerfolge einschlägiger Versuche beweisen.

Dies gilt auch für den Fall noch größerer p/p_2, z. B. daß gerade alle in F_3 vorhandene kinetische Energie J^2/M^2 während der Rückverdichtung auf den Außendruck verbraucht wird, was dann gelingt, wenn

$$\frac{p}{p_2} = \left[1+\frac{\frac{J^2}{M^2}}{\frac{2\left(ME\frac{1}{2}J^2\right)}{M^2}}\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}$$

ist. Die gesamte Triebswerksanlage wirkt trotz allen Energieverbrauchs dann gerade wie ein *Pitot*sches Staurohr, hat also insgesamt nur Widerstand.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich, daß die Strahlmischung möglichst bei Überdrücken über den Ruhedruck der Außenluft stattfinden muß, damit nach der Mischung eine Entspannung auf den Außendruck und möglichst nicht eine Verdichtung auf ihn notwendig wird, d. h. daß grundsätzlich melotartige Unterdruckmischdüsen schlechter oder unbrauchbar und staustrahlartige Überdruckmischdüsen günstiger sind.

Da demnach Unterdruckmäntel nur im Stand und bei sehr niedrigen Bewegungsgeschwindigkeiten Vorteile versprechen, werden sie uns hier nurmehr vergleichsweise oder für Bodenanlagen beschäftigen.

g) Abhängigkeit des P/P_0 vom inneren Wirkungsgrad des Kerntriebwerkes.

Das Verhältnis der kinetischen Strahlenergie zur gesamten Strahlenergie der verschiedenen Strahltriebwerke, gekennzeichnet durch die Strahl-Machzahl, ist außerordentlich verschieden.

Bei Raketen nähert es sich unter Umständen 50%, bei Turbinentriebwerken liegt es um 10% und bei Verpuffungsstrahlrohren sinkt es auf wenige Prozente ab. Für die grundsätzliche Anwendung der Impulsheizung auf die Abgase dieser Triebwerke ist es daher wissenswert, wieweit die erreichbare Schuberhöhung P/P_0 von diesen inneren Wirkungsgraden abhängt. Man kann zu diesem Zweck die Gleichung (24) in der Form schreiben:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{J\sqrt{\frac{2\,ME}{J^2}\cdot\left[1-\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]+\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}} - \varrho F_2 v^2 \sqrt{1+\frac{2\,g\,c_p\,T}{v^2}\cdot\left[1-\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}}{J-\varrho F_2 v^2\left\{1+\frac{2\,g\,c_p\,T}{v^2}\cdot\left[1-\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]\right\}\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}}.$$

In vielen, praktisch wichtigen Fällen wird das P/P_0 überwiegend durch jene Glieder bestimmt, die M, E und J enthalten, d. h. es wird mit

$$\sqrt{\frac{2\,ME}{J^2}\cdot\left[1-\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]+\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}$$

wachsen. Große ME/J^2, d. h. große Verhältnisse der gesamten zur kinetischen Energie oder kleine Strahlmachzahlen laut (12a) bedeuten aber nichts anderes, als kleine thermische Wirkungsgrade.

Man wird unter sonst gleichen Verhältnissen daher mit Kerntriebwerken schlechten inneren Wirkungsgrades, d. h. kleiner Strahlmachzahl, z. B. Verpuffungsstrahlrohren, höhere Schubverbesserungen zu erwarten haben, als z. B. mit Turbinentriebwerken oder Raketen.

Da der Mantelschub durch die thermischen Abfallenergien und der Kernschub durch die „nützlichen" kinetischen Energien bestimmt wird, ist dies ganz natürlich.

Der Einfluß des thermischen Wirkungsgrades ist oft größer, als der an sich große Einfluß des Mischkammerdruckes. Praktisch liegen die ME/J^2 zwischen etwa 10 und 40, während die $\left[1-(p/p_2)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]$ bei den hier zunächst behandelten hohen Unterschallgeschwindigkeiten sich zwischen 0,05 und 0,1 bewegen, und das zweite Glied unter der Wurzel immer nahe an 1 bleibt.

Die Unterschiede in den Schubfaktoren können also infolge der Wahl verschiedener Kerntriebwerke größer werden, als infolge verschiedener Mischkammerdrücke.

III. Beispiele.

8. Durch Raketenabgase beheizter Luftzumischmantel. Gegeben sei eine Rakete mit den Strahl-Kennwerten $\varrho_0 = 0{,}02\ \mathrm{kg\,sec^2/m^4}$, $v_0 = 2000\ \mathrm{m/sec}$, $F_0 = 0{,}04\ \mathrm{m^2}$, $T_0 = 1750°\ \mathrm{K}$, daher $\varrho_0 F_0 v_0 = 1{,}6\ \mathrm{kg\,sec/m}$, $\varrho_0 F_0 v^2 = 3200\ \mathrm{kg}$, $\varrho_0 F_0 v_0 (v_0^2/2 + g c_p T_0) = 6{,}720\,000\ \mathrm{kg\,m/sec}$ ($= 90\,000\ \mathrm{PS}$). Die an der Raketenmündung noch gebundene Dissoziationswärme betrage $3{,}620\,000\ \mathrm{kg\,m/sec}$, entsprechend einem unteren Gemischheizwert der Raketentreibstoffe von 1540 kcal/kg. Die Strahlmachzahl ist $v_0/a_0 = 2{,}63$, das Entspannungsverhältnis der Rakete $p_i/p_0 = 23$. Es sind günstige Anordnungen von schuberhöhenden Luftzumischmänteln bei den Fluggschwindigkeiten 0 und 800 km/h anzugeben.

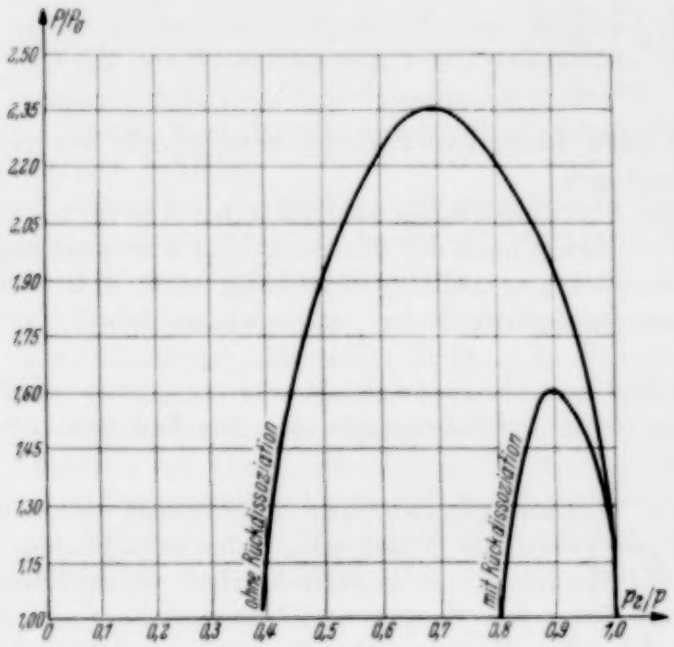


Abb. 5. Abhängigkeit des Schubquotienten P/P_0 einer Unterdruckmischkammer im Stand vom Mischkammerdruck mit und ohne Rückdissoziation des 1750° K heißen Raketenstrahles.

Bei $v = 0\ \mathrm{km/h}$ kommt naturgemäß nur eine Unterdruckmischkammer in Frage. Da Eigen-Widerstände des Mantels hier wenig ausmachen und der Schub im Stand mit den Zumischmassen bekanntlich unbegrenzt wächst, läßt sich eine Optimalgröße für diesen Fall nicht angeben, wie auch die Differentiation der Gleichung (24) nach F_2 zeigt.

Wählt man willkürlich einen Durchmesser des F_2-Querschnittes von 2 m, ferner den Zustand der Außenluft entsprechend der Normatmosphäre und läßt den ebenfalls willkürlich wählbaren Mischkammerdruck p_2 zunächst offen, so folgen mit $F_{20} = 0$ und $v = 0$ aus den Gleichungen (5a) bis (7a) die Werte für M, J und E in Abhängigkeit von p/p_2 und aus Gleichung (24) der entsprechende Schubkoeffizient.

Es ist bekannt, daß $P/P_0 = 1$ wird für $p_2/p = 1$, ebenso für kleine Werte von p_2/p. Daher muß es notwendig einen besten Wert für p_2/p hinsichtlich Schuberhöhung geben, den man durch Differentiation von (24) nach p_2/p zu etwa 0,7 bestimmen kann, wie auch die Darstellung dieser Gleichung in Abb. 5 (ohne Rückdissoziation) zeigt. P/P_0 wird dort rund 2,3, d. h. der Gesamtschub steigt durch die Ummantelung von 3,2 Tonnen auf 7,3 Tonnen. Paßt man die Raketendüse den neuen Druckverhältnissen an, so wird $p/p_0 = 33$, die Auspuffgeschwindigkeit steigt auf 2080 m/s, und es folgt noch ein kleiner zusätzlicher Kernstrahlschub von 0,13 Tonnen, mit dem die Gesamtrechnung zu widerholen wäre. Hat der Enddiffusor der Ummantelung einen von Eins verschiedenen Wirkungsgrad, so erreicht man nur einen etwas höheren Mischkammerdruck p_2, der nach Abb. 5 wegen des flachen Schubmaximums nur wenig auf P/P_0 einwirkt.

Zum Druckabfall auf 0,7 p gehört eine Einströmgeschwindigkeit von 238 m/s und eine zugehörige Einströmmachzahl von 0,72. Der Mischungswirkungsgrad wird etwa 55%, und die Gemischmachzahl nach (12a) bleibt ausreichend über der Einströmmachzahl, um den Wiederanstieg auf den Außendruck zu sichern.

Mit Hilfe von (16) bis (23) lassen sich die gewünschten übrigen Größen berechnen. Die Abmessungen dieser Ummantelung sind in Abb. 6 dargestellt und erinnern an Windkanalverhältnisse. Ihre Anwendungsmöglichkeiten für sehr langsame Luftfahrzeuge, Starthilfen oder Land- und Wasserfahrzeuge erscheinen daher zweifelhaft, dagegen sind diese Unterdruckmäntel für bodenfeste Versuchsanlagen interessant, z. B. um Raketenmotoren bei niedrigen Düsenmündungsdrücken oder ganze Raketengeräte bei hohen Anströmgeschwindigkeiten zu untersuchen.

ferner für Unter- und Überschallwindkanäle sehr großer Meßquerschnitte mit Raketenantrieb, besonders durch Hochdruck-Niedertemperatur- (z. B. Wasserdampf-)-Raketen.

Bei der bisherigen Rechnung wurde noch die Möglichkeit außer acht gelassen, daß die erhebliche Dissoziation des Raketenstrahles während des relativ langdauernden Mischvorganges trotz der sehr beträchtlichen Abkühlung der Feuergase nicht einfriert, sondern zurückgeht, also die eingangs erwähnte Dissoziationsenergie das Mischgut zusätzlich aufheizt.

Dabei bleiben M und J natürlich unverändert, während E entsprechend wächst und dadurch auch der Schubkoeffizient laut (24) sich in der in Abb. 5 (mit Rückdissoziation) dargestellten Weise verschiebt.

Das Mischkammer-Druckoptimum liegt nun bei $p_2/p = 0{,}9$ und vermindert den dort besten Schubquotienten auf $P/P_0 = 1{,}6$; der Gesamtschub steigt also dann von 3,2 Tonnen nur auf 5,1 Tonnen. Die weitere Wärmezufuhr durch Rückdissoziation und eventuell Nachverbrennung der Feuergase wirkt daher in der Unterdruckmischkammer sehr verschlechternd auf den Schubgewinn. In diesem Falle würde also auch eine starke Relaxation der Wirbelumwandlung in Wärme vorteilhaft sein.

Mit von Null weg steigender Fluggeschwindigkeit findet man bei der Mantelauslegung einen Bereich mit zwei optimalen Mischkammerdrücken, je einen unter und einen über dem Außendruck der ruhenden Luft. Der erstere wird mit wachsendem v bald bedeutungslos, so daß bei den praktisch interessierenden Fluggeschwindigkeiten nur die Überdruckmischkammern in Frage kommen.

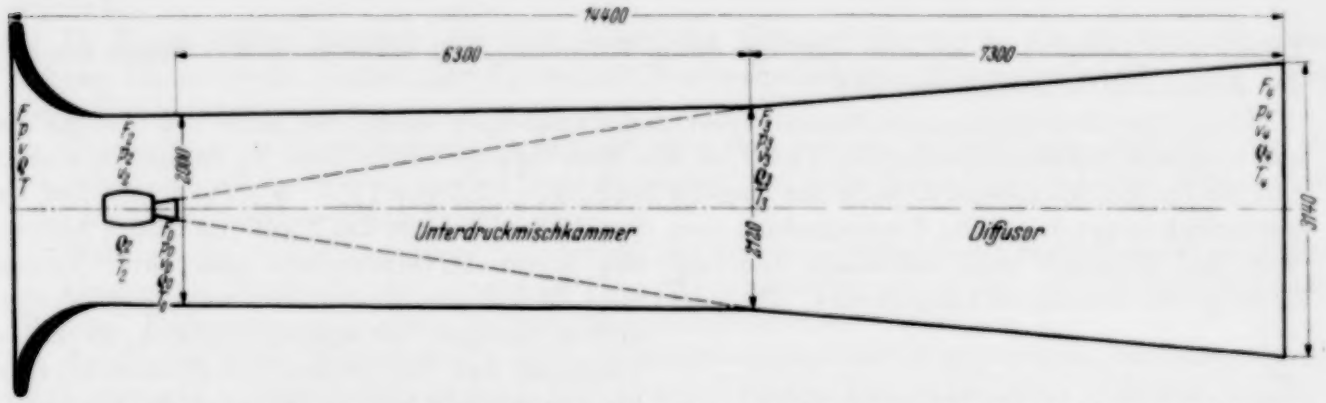


Abb. 6. Unterdruckummantelung einer 3,2-Tonnen-Rakete für die Fluggeschwindigkeit $v = 0$ km/h und mit einem Schubsteigerungsfaktor von $P/P_0 = 2{,}36$ bei $p_2/p = 0{,}7$ (Hochgeschwindigkeits-Großwindkanal mit $v_2 = 238$ m/s).

Die optimalen Schuberhöhungen werden dabei am größten am Stand oder bei sehr niedrigen Fluggeschwindigkeiten (Bereich guter *Melot*-Wirkung), durchlaufen einen Bereich sehr mäßiger Werte bei mittleren Unterschallgeschwindigkeiten, um schließlich bei Annäherung an die Schallgeschwindigkeit (Bereich guter *Lorin*-Wirkung) wieder zu größeren Werten anzuwachsen, die jedoch noch weit hinter den hohen Anfangswerten zurückbleiben. Erst im Überschallbereich wird der Überdruckmantel dem Unterdruckmantel im Stand gleichwertig.

Im Flug bei $v = 800$ km/h ist der Luftwiderstand W des Mantels für die Optimalauslegung mitzuberücksichtigen. Man kann wieder die Schuberhöhung $(P-W)/P_0$ als Funktion der zu bestimmenden Größen F_2 und p_2/p ausdrücken und findet deren Optimalwerte z. B. zu den in Abb. 7 dargestellten Verhältnissen mit $p_2/p = 1{,}2$ und einer Schubsteigerung um etwa 20%, was einem Schubbeiwert des Mantels von rund $c_s = 0{,}2$ entspricht, also bei den hier getroffenen Annahmen voller Rückverwandlung der Dissoziation und Turbulenz in Wärme schon um 30% des aus einem gegebenem Staustrahlmantel überhaupt möglichen Schubes.

Während die Unterdruckmischung Erweiterungen der Eintritts- und Austrittsquerschnitte zeigte, sehen wir an der Überdruckmischkammer die bekannten Verengungen dieser beiden Querschnitte.

Insgesamt wird man aus den mäßigen Schuberhöhungen dieses Beispiels den Schluß ziehen, daß die Impulsheizung des Staustrahltriebwerkes durch Raketenabgase nur bei besonderen Verhältnissen technische Bedeutung haben dürfte.

9. Durch Turbinentriebwerks- oder Verpuffungsstrahlrohr-Abgase beheizter Staustrahlrohrmantel. Es seien die notwendigen Kenngrößen des ein- und austretenden Gasstrahles eines Strahltriebwerkes mäßiger Strahlmachzahl bei der Fluggeschwindigkeit 200 km/h gegeben. Es

ist die Anordnung einer Staustrahlummantelung mit höchstem Schub zu suchen, wobei sich die Strömungsgeschwindigkeiten um Triebwerkseinlaß und Auslaß nicht ändern sollen, während die Fluggeschwindigkeit $v = 800$ km/h beträgt.

Man wird eine Anordnung gemäß der Abb. 4 wählen, wobei das Kerntriebwerk im Innern des Mantels in der adiabatisch gestauten Luft in einem Klima von zwar gleicher Umströmungsgeschwindigkeit von 200 km/h wie im Ausgangszustand, aber mit erhöhten Werten von Druck,

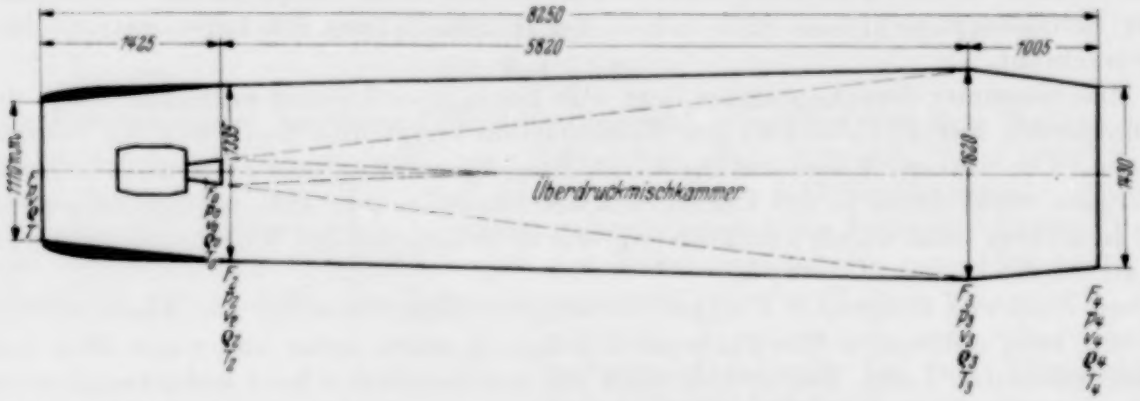


Abb. 7. Theoretisch optimale Ummantelung einer 3,2-Tonnen-Rakete mit dissoziiertem Abgasstrahl für die Fluggeschwindigkeit $v = 800$ km/h und mit einem Schubsteigerungsfaktor von $P/P_0 = 1{,}195$. (Gesamtschub 3,28 Tonnen, Mischkammerdruck $p_c = 1{,}2\,p$, Massenverhältnis $m_0/m_2 = 1 : 16{,}9$).

Dichte und Temperatur arbeitet. Infolge dieser Klimatisierung allein steigt der Schub um 15% der Brennstoffverbrauch um 17%.

Unter Berücksichtigung des Mantelwiderstandes kann man wieder mit Hilfe von (5a) bis (7a) und (24) den Schubkoeffizient als Funktion der Mantelquerschnittsfläche F_2 darstellen und erhält ein flaches Maximum z. B. in der Gegend bei $F_2/F_0 = 2{,}3$ von $(P - W)/P_0 = 1{,}2$. Der Gesamtschub steigt durch die Ummantelung vom Normalwert bei 200 km/h auf einen 20% höheren Wert bei 800 km/h ohne merkbare Änderung des Brennstoffverbrauches, also unter Vervielfachung des Gesamtwirkungsgrades. Die praktische Bedeutung dieser Anordnung liegt weniger in dem mäßigen Schubgewinn an sich, als in dem Umstand, daß der erhöhte Schub noch bei einer Fluggeschwindigkeit zu erwarten ist, bei der die Funktion eines bloßen Verpuffungsstrahlrohres überhaupt fraglich ist. Der Mantel täuscht dem Kerntriebwerk bei 800 km/h Fluggeschwindigkeit noch die ihm angenehmeren Verhältnisse von 200 km/h vor, insbesondere die niedrigere Diffusoreinströmgeschwindigkeit, das um fast einen Flugstaudruck erhöhte Innendruckniveau des Kerntriebwerkes und damit die Kompensation der hohen zusätzlichen Öffnungsdrücke auf die Luftventilklappen und die verbesserte Luftzuführung von rückwärts für die Luftvorlagerung.

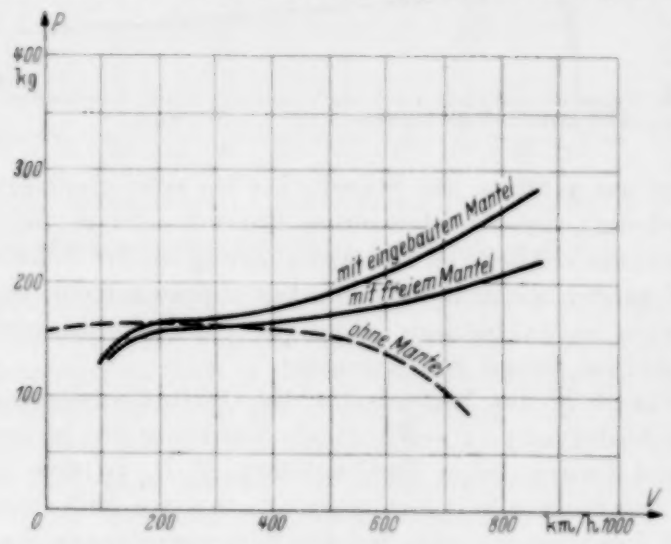


Abb. 8. Schubverlauf eines Verpuffungsstrahlrohres mit und ohne Ummantelung.

Während der Wirkungsgrad des erwähnten Beispielstahlrohres bei $v = 200$ km/h etwa 1,5 % betrug, kann er durch die Ummantelung bei $v = 800$ km/h auf 8 % gesteigert werden, kommt also den bekannten Wirkungsgraden bloßer Turbinenstrahltriebwerke schon recht nahe, so daß die Reichweite von so ausgerüsteten Flugkörpern sehr beträchtlich werden kann.

Abb. 8 zeigt den ungefähren Schubverlauf über der Fluggeschwindigkeit eines Verpuffungsstrahlrohres ohne Ummantelung, mit dem vorstehend erläuterten frei im Luftstrom stehenden Mantel und schließlich noch mit einem so in einem vorhandenen Flugzeugrumpf oder Flügel eingebauten Mantel, daß durch ihn keine zusätzlichen Widerstände entstehen.

Die Ummantelung bewirkt, daß der Schubverlauf des Verpuffungsstrahlrohres ähnlich dem eines Turbotriebwerkes wird. Dieser dem Verpuffungsstrahlrohr sehr günstige Umstand läßt zugleich erkennen, daß die Wirkung der Ummantelung auf ein Turbotriebwerk weitaus geringer

bleibt, da dessen normale Einrichtung schon einen großen Teil der durch die Ummantelung ausgenützten Effekte vorwegnimmt.

10. Durch Kolbentriebwerks-Abgase beheizter Luftzumischmantel. Ein 4000-PS-Kolbentriebwerk liefert bei 800 km/h Fluggeschwindigkeit etwa 950 kg Schraubenschub und rund 3,8 kg/sec Abgase von 606° C Temperatur. Der Flugstaudruck in Bodennähe ist $q = 3080$ kg/m²-Wollte man diese Abgasmenge mit einer möglichst hohen, z. B. 100fachen Luftmenge mischen, so wäre das erforderliche $F_1 = 1{,}39$ m² und die Temperatur nach der Mischung wäre $T_3 = (873 + 100\,(288 + v^2/2000))/101 = 318°\,K$, damit der Mantelschub $P = 2\,q\,F_1\,(\sqrt{T_3/T_2} - 1) = 81{,}3$ kg, d. i. 8,5% des Schraubenschubes.

Der Eigenwiderstand des Überdruckmantels wurde ebenso wie der des ganzen Kolbentriebwerkes außer acht gelassen, ein allfälliger direkter Abgasstrahlschub bleibt von der Zusatzeinrichtung praktisch unberührt. Bei geringeren Fluggeschwindigkeiten verschlechtert sich, bei höheren verbessert sich dieses Schubverhältnis.

IV. Zusammenfassung.

Die Zumischung von Umgebungsluft zu Abgasstrahlen von Triebwerken kann schuberhöhend wirken, wenn sie bei anderem als dem Umgebungsdruck stattfindet.

Zumischung in Unterdruckmischkammern ist allerdings auf so mäßige Bewegungsgeschwindigkeiten beschränkt, daß der Bewegungsstaudruck noch nicht zu störend auf den Unterdruck einwirkt.

In diesen Fällen ergeben sich sehr erhebliche Schubsteigerungen, die die Unterdruckmischung für ortsfeste Unter- und Überschall-Windkanalanlagen, Höhenprüfstände, und Land- oder Wasserfahrzeuge interessant machen.

Zumischung in Überdruckmischkammern wird dagegen um so wirksamer, je höher die Bewegungsgeschwindigkeit ist, so daß diese besonders für Luft-Fahrzeuge im hohen Unterschall- und im Überschallbereich in Frage kommt.

Dabei ist die verhältnismäßige Schuberhöhung unter sonst gleichen Umständen um so größer, je kleiner die Machzahl des ursprünglichen Abgasstrahles ist, steigt also in der Richtung: Rakete, Turbinenstrahltriebwerk, Verpuffungsstrahltriebwerk stark an.

Bei der letzteren Triebwerksart, die noch funktionsempfindlich gegen hohe Anblasegeschwindigkeiten und geringe Luftdichten ist, läßt sich in Überdruckmischkammern außerdem eine Klimaverbesserung erzielen, wodurch der Fluggeschwindigkeitsbereich und Flughöhenbereich für Verpuffungsstrahltriebwerke sehr erweiterungsfähig wird.

Man darf von ihnen unter diesen Umständen bei hohen Fluggeschwindigkeiten Gesamtwirkungsgrade erwarten, die sich denen der Turbinenstrahltriebwerke nähern.

Die relative Schuberhöhung ist bei Unterdruckmischkammern im Stand am größten, um mit wachsender Bewegungsgeschwindigkeit sehr rasch abzufallen und schon bei Bruchteilen der Machzahl Eins zu verschwinden.

Die relative Schuberhöhung ist bei Überdruckmischkammern im Stand Null, um mit wachsender Bewegungsgeschwindigkeit sehr rasch anzusteigen und im Überschallbereich Höchstwerte zu erreichen.

(Eingegangen am 16. Januar 1950.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *E. Sänger*, Courcelle sur Yvette (S. et O.), Frankreich.

Ergänzungen zu F. Riegels: Das Umströmungsproblem bei inkompressiblen Potentialströmungen*.

Von E. Truckenbrodt.

1. Einleitung. Das von *F. Riegels* entwickelte Verfahren zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung an Profilen mit einfachen Summenformeln hat sich in der Praxis als recht brauchbar erwiesen, so daß es mir zweckmäßig erscheint, noch einige Ergänzungen insbesondere bezüglich der Gesamtkraft und des Gesamtmomentes mitzuteilen.

2. Kraft und Moment. Die Berechnung der Auftriebskraft und des Auftriebsmomentes geschieht nach *Riegels* durch die Gleichungen (43) und (48) der II. Mitteilung. In diesen Formeln treten die von *Riegels* zur Darstellung der Profilform verwendeten Fourierkoeffizienten a_ν und b_ν auf. Wir können die *Riegels*chen Summenformeln auch anders schreiben, indem wir die Fourierkoeffizienten entweder durch die entsprechenden Integralausdrücke ersetzen, oder sie, ähnlich wie schon bei der Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung, mit Hilfe der *Gauß*schen Quadratur in Summenausdrücke umformen. Die erste Form der Darstellung führt auf sehr einfache, im Fall der reinen Profilwölbung bereits bekannte, Integralformeln. Der Integrand besteht jeweils aus dem Produkt einer vom Polarwinkel φ abhängigen Funktion mit den Profilordinaten $y(\varphi)$. Die zweite Form der Darstellung liefert einfache Summenformeln, in denen jeweils nur die Produkte der Profilordinaten y an gewissen festen Stellen der x-Achse mit gewissen festen Koeffizienten auftreten.

Im einzelnen gilt:

Auftriebsänderung mit wachsendem Anstellwinkel [nach Gleichung (43) II. Mitt.]:

$$\frac{d\,c_a}{d\,\alpha} = 2\pi\left(1 + \sum_1^\infty b_{2\,\nu-1}\right) = 2\pi\left(1 + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{y_{(\varphi)}^{(t)}}{\sin\varphi}\,d\varphi\right) = 2\pi\left(1 + \sum_1^{N-1} A_m\, 2\,y_m^{(t)}\right).$$

Anstellwinkel bei verschwindender Luftkraft [nach Gleichung (44) II. Mitt.]:

$$\alpha_0 = \frac{2\pi}{\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}}\,\alpha_0^{(s)}$$

mit

$$\alpha_0^{(s)} = \sum_1^\infty \nu\, a_\nu = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{y_{(\varphi)}^{(s)}}{1-\cos\varphi}\,d\varphi = \sum_1^{N-1} B_m\; 2\,y_m^{(s)}.$$

Momentenänderung mit wachsender Luftkraft [nach Gleichung (50) II. Mitt., umgeformt]:

$$\begin{aligned}\frac{d\,c_m}{d\,c_a} &= -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{2}\,b_1 + \sum_1^\infty (-1)^\nu\, b_\nu + \frac{1}{2}\sum_1^\infty \nu\, b_\nu\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{4\sin\varphi + 3\sin 2\varphi}{1+\cos\varphi}\,y_{(\varphi)}^{(t)}\,d\varphi + \frac{d\,y^{(t)}}{d\,\varphi}(0)\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left(1 + \sum_1^{N-1} C_m\; 2\,y_m^{(t)}\right).\end{aligned}$$

Moment bei verschwindender Luftkraft [nach Gleichung (49) II. Mitt.]:

$$c_{m_0} = \frac{\pi}{2}\sum_2^\infty \nu\, a_\nu = -\int_0^\pi \frac{2\cos\varphi - \cos 2\varphi}{1-\cos\varphi}\,y_{(\varphi)}^{(s)}\,d\varphi = \sum_1^{N-1} D_m\; 2\,y_m^{(s)}.$$

Aus der Theorie der dünnen Platten ($y^{(t)} = 0$) ergibt sich außerdem:

Anstellwinkel des stoßfreien Eintritts [nach Gleichung (37b) II. Mitt.]:

$$\alpha_s = \sum_1^\infty (2\,\nu - 1)\, a_{2\,\nu-1} = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\,y_{(\varphi)}^{(s)}\,d\varphi = \sum_1^{N-1} E_m\; 2\,y_m^{(s)}.$$

---

* *F. Riegels*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 373 (I. Mitteilung) und Ing.-Arch. 17 (1949), S. 94 (II. Mitteilung).

Auftriebsbeiwert des stoßfreien Eintritts:

$$c_{a_s} = 2\pi\,(\alpha_s - \alpha_0^{(s)}) = -4\pi \sum_1^{\infty} \nu\, a_{2\nu} = 4 \int_0^{\pi} \frac{y_{(\varphi)}^{(s)}}{\sin^2\varphi}\, d\varphi = \sum_1^{N-1} F_m\, 2\, y_m^{(s)}.$$

Wir erwähnen noch den bekannten Zusammenhang $\xi = \frac{l}{2}\,(1 + \cos\varphi)$ ($\varphi = 0$ Hinterkante).

Die Konstanten A_m bis F_m errechnen sich für die Stellen $\xi_m = \frac{l}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi m}{N}\right)$ ($m = 0$ Hinterkante) wie folgt:

$$A_m = \frac{1}{N}\left(\frac{1-(-1)^m}{\sin\frac{\pi m}{N}} + \frac{1-(-1)^N}{2}\,(-1)^m \operatorname{tg}\frac{\pi m}{2N}\right).$$

$$B_m = -\frac{1}{N}\,\frac{1-(-1)^m}{1-\cos\frac{\pi m}{N}}.$$

$$C_m = \frac{1}{N}\left(3\sin\frac{\pi m}{N} - \left(1-(-1)^{N+m}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi m}{2N}\right) - \frac{(-1)^m}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi m}{2N}.$$

$$D_m = -\frac{\pi}{2N}\left(\frac{1-(-1)^m}{1-\cos\frac{\pi m}{N}} + 2\cos\frac{\pi m}{N}\right).$$

$$E_m = -\frac{1}{N}\left(\frac{1-(-1)^m}{\sin^2\frac{\pi m}{N}}\cos\frac{\pi m}{N} - \frac{1-(-1)^N}{2}\,\frac{(-1)^m}{1+\cos\frac{\pi m}{N}}\right),$$

$$F_m = \frac{2\pi}{N}\left(\frac{1-(-1)^m}{\sin^2\frac{\pi m}{N}} + \frac{1-(-1)^N}{2}\,\frac{(-1)^m}{1+\cos\frac{\pi m}{N}}\right).$$

Diese Konstanten sind für $N = 12$ berechnet und in Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1. *Quadraturkonstanten zur Berechnung der Auftriebskraft, des Anstellwinkels und des Auftriebsmomentes* ($N = 12$).

m	ξ_m/l	A_m	B_m	C_m	D_m	E_m	F_m
1	0,98 297	0,64 395	—4,89 189	3,84 064	—7,93 704	—2,40 322	15,63 328
2	0,93 302	0	0	—1,74 103	—0,22 673	0	0
3	0,85 356	0,23 570	—0,56 904	1,31 485	—1,07 896	—0,23 571	2,09 440
4	0,75 000	0	0	—0,64 952	—0,13 091	0	0
5	0,62 941	0,17 255	—0,22 487	0,76 521	—0,42 099	—0,04 623	1,12 238
6	0,50 000	0	0	—0,25 000	0	0	0
7	0,37 059	0,17 255	—0,13 240	0,40 794	—0,14 021	0,04 623	1,12 238
8	0,25 000	0	0	—0,07 216	0,13 091	0	0
9	0,14 645	0,23 570	—0,09 763	—0,01 849	0,03 178	0,23 571	2,09 440
10	0,06 699	0	0	—0,00898	0,22 673	0	0
11	0,01 704	0,64 393	—0,08 478	—1,13 545	0,11 971	2,40 322	15,63 328

3. Geschwindigkeitsverteilung. Zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung erscheinen mir vom praktischen Standpunkt aus einige geringfügige Umänderungen in Gleichung (51) der II. Mitt. zweckmäßig. Der letzte Ausdruck im Zähler der Gleichung (38) der II. Mitt. läßt sich auch in folgender Form schreiben:

$$\Sigma\,\beta_\mu \cos\mu\varphi = \frac{1}{\sin\varphi}\sum_1^{\infty}\left[\nu\sin\nu\varphi\, b_\nu + \frac{1}{\sin\varphi}\left((1-\cos\nu\varphi)\, b_\nu - (1-\cos\varphi)\, b_{2\nu-1}\right)\right].$$

Unter Anwendung der *Gauß*schen Quadratur läßt sich dann die G-Summe in Gleichung (51) der II. Mitt. wie folgt darstellen:

$$\sum_1^{N} {}^{*}G_{mn}\, 2\, y_m^{(t)} = \sum_{m=1}^{N-1} (G_{mn} + \Delta G_{mn})\, 2\, y_m^{(t)}$$

mit
$$\Delta G_{mn} = \frac{(-1)^{m+1}}{2N}\left(\frac{1-(-1)^n}{1-\cos\frac{\pi n}{N}}\operatorname{ctg}\frac{\pi m}{2N} - (-1)^N\,\frac{1-(-1)^{N+n}}{1+\cos\frac{\pi n}{N}}\operatorname{tg}\frac{\pi m}{2N}\right).$$

Unter Berücksichtigung der Bezeichnungen von *Riegels* können wir auch schreiben:

$$\Delta G_{mn} = -G_{Nn} B_{mN} + G_{N,N-n} B_{N-m,N}$$

mit $$B_{mN} = (-1)^{N+m} \operatorname{tg} \frac{\pi m}{2N} \quad \text{und} \quad G_{Nn} = -\frac{1}{N} \frac{1-(-1)^{N+n}}{1+\cos\frac{\pi n}{N}}.$$

B. denken wir, daß die Profilneigungen an der Hinterkante und Vorderkante durch die Ausdrücke

$$\frac{dy^{(t)}}{d\varphi}(0) = -\sum_{1}^{N-1} B_{N-m,N}\, 2\, y_m^{(t)} \quad \text{und} \quad \frac{dy^{(t)}}{d\varphi}(\pi) = \sum_{1}^{N-1} B_{mN}\, 2\, y_m^{(t)}$$

gegeben sind, dann können wir die Identität mit der Formel von *Riegels* nachweisen.

Bei der numerischen Auswertung der Gleichung (51) der II. Mitt. erfordert der Nenner im Vergleich zum Zähler einen nicht unwesentlichen Aufwand. Da aber der Summenausdruck in der Wurzel nur eine Korrektur für die Stellen des Profils starker Krümmung (Vorderkante) darstellt, möchte ich vorschlagen, den Nenner durch seinen ursprünglichen Ausdruck $\sqrt{c_n + y_n'^2}$ zu ersetzen. Die Profilneigung $y' = d\left(\frac{y}{l}\right)/d\varphi$ nach dem Polarwinkel kann man leicht für Ober- und Unterseite auf graphischem Wege ermitteln.

Insgesamt schlage ich vor, Gleichung (51) der II. Mitt. wie folgt abzuändern:

$$\frac{W}{V}(\xi_n) = \frac{1}{\sqrt{c_n + y_n'^2}} \left[\cos\alpha \left(|a_n| + \sum_{m=1}^{N-1} A_{mn}\, 2\, y_m^{(t)} \pm \sum_{m=1}^{N-1} C_{mn}^{*}\, 2\, y_m^{(s)}\right) \pm \sin\alpha \left(|b_n| + \sum_{m=1}^{N-1} H_{mn}\, 2\, y_m^{(t)}\right)\right].$$

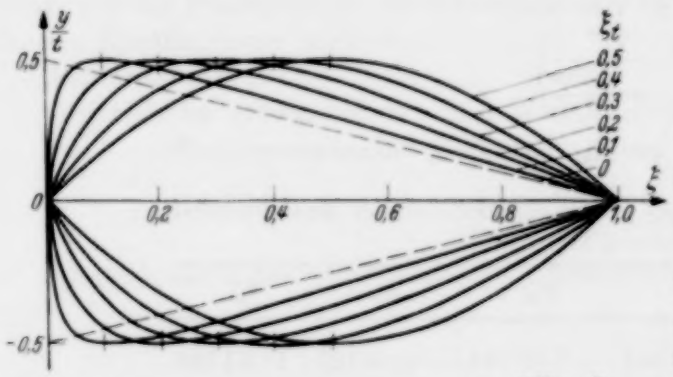


Abb. 1. Symmetrischer Profiltropfen: $y = a\frac{\xi(1-\xi)}{1+b\,\xi}$.

Hierin bedeutet:

Oberes Vorzeichen = Profiloberseite

Unteres Vorzeichen = Profilunterseite

$C_{mn}^{*} = C_{mn} - C_{mo}$, $H_{mn} = |b_n|\,(G_{mn} + \Delta G_{mn})$.

Die neuen Konstanten C_{mn}^{*} und H_{mn} sind für $N = 12$ in den Zahlentafeln 2 und 3 mitgeteilt.

Gegenüber der Formel von *Riegels* sind zwar in der eckigen Klammer einige Produkte mehr zu berechnen, da für die Konstanten C_{mn}^{*} und H_{mn} für die ungeraden Werte $n = 1, 3, 5 \ldots$ nicht die Vereinfachung besteht, daß sie für $|m-n| = 2, 4, 6 \ldots$ verschwinden. Die neue Darstellung bietet aber den Vorteil, daß einmal in der G-Summe nur die Profilordinaten $y^{(t)}$ vorkommen und daß zum anderen die Profilordinaten $y^{(s)}$ nur in einem Summenausdruck auftreten. Man wird also zweckmäßigerweise zuerst die Stellen $n = 2, 4, 6 \ldots$ berechnen und je nach Bedarf die Zwischenpunkte $n = 1, 3, 5 \ldots$ nachholen.

4. Einfache Sonderfälle. Zu den von Riegels mitgeteilten einfachen Sonderfällen wollen wir noch drei neue hinzufügen.

a) Die Kontur eines symmetrischen Tropfens mit veränderlicher Dickenrücklage kann man wie folgt beschreiben:

$$y(\xi) = a\frac{\xi(1-\xi)}{1+b\,\xi} \quad \text{mit} \quad a = \frac{1}{2}\frac{t}{\xi_t^2} \quad \text{und} \quad b = \frac{1-2\,\xi_t}{\xi_t^2}.$$

Alle Größen sind durch die Profiltiefe l dimensionslos gemacht, und es bedeutet t die größte Dicke und ξ_t die Dickenrücklage. Die Dickenrücklage kann zwischen 0 und 1 verändert werden, wobei die Profilkontur stets wendepunktfrei bleibt. An Vorder- und Hinterkante läuft das Profil in eine Spitze aus (Abb. 1).

Für den Fall $\xi_t = \frac{1}{2}$ ergibt sich mit $b = 0$ das bekannte Parabel (Kreisbogen)-Zweieck.

Die Quellbelegung auf der x-Achse ergibt sich zu

$$\frac{q(\xi)}{V} = 2\,y' = 2\,a\frac{1-2\,\xi-b\,\xi^2}{(1+b\,\xi)^2}.$$

Aus Gleichung (33) der II. Mitt. folgt dann, der Einfachheit halber nur für symmetrische Anströmung angegeben, die Geschwindigkeitsverteilung zu

Tabelle 2. C^{*}_{mn} $N = 12$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n = 1$	5,44 594	—1,36 523	0,28 452	—0,19 848	0,11 244	—0,08 932	0,06 620	—0,05 751	0,04 882	—0,04 560	0,04 238
2	1,08 071	3,00 000	—0,99 467	0	—0,06 292	0	—9,01 443	0	—0,00 547	0	—0,00 322
3	2,44 594	—1,27 919	3,28 452	—1,25 607	0,11 244	—0,16 667	0,06 620	—0,07 741	0,04 882	—0,05 429	0,04 238
4	2,24 746	0	—0,97 155	3,00 000	—1,13 494	0	—0,09 725	0	—0,02 859	0	—0,01 513
5	2,44 594	—0,17 536	0,28 452	—1,24 738	3,11 244	—1,24 416	0,06 620	—0,16 345	0,04 882	—0,08 063	0,04 238
6	2,35 662	0	0,11 785	0	—1,13 172	3,00 000	—1,17 796	0	—0,11 785	0	—0,04 694
7	2,44 594	—0,08 063	0,28 452	—0,16 345	0,11 244	—1,24 416	3,06 620	—1,24 738	0,04 882	—0,17 536	0,04 238
8	2,38 843	0	0,20 711	0	—0,05 101	0	—1,18 118	3,00 000	—1,20 725	0	—0,15 610
9	2,44 594	—0,05 429	0,28 452	—0,07 741	0,11 244	—0,16 667	0,06 620	—1,25 607	3,04 882	—1,27 919	0,04 238
10	2,40 034	0	0,23 023	0	0,03 181	0	—0,10 916	0	—1,23 037	3,00 000	—1,32 285
11	2,44 594	—0,04 560	0,28 452	—0,05 751	0,11 244	—0,08 932	0,06 620	—0,19 848	0,04 882	—1,36 523	3,04 238

Tabelle 3. H_{mn} $N = 12$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n = 1$	0,71 147	—0,35 449	0,10 031	—0,09 013	0,05 376	—0,04 694	0,03 104	—0,02 619	0,01 552	—0,01 200	0
2	0,14 220	0,80 376	—0,41 194	0	—0,04 828	0	—0,01 880	0	—0,01 323	0	—0,02 441
3	0,31 554	—0,32 968	1,34 019	—0,69 694	0,04 881	—0,11 784	0,02 265	—0,04 953	0	—0,02 045	—0,04 881
4	0,29 584	0	—0,40 245	1,73 202	—0,87 083	0	—0,12 675	0	—0,06 904	0	—0,11 483
5	0,31 325	—0,02 924	0,09 043	—0,68 198	2,33 747	—1,17 794	0	—0,16 850	—0,04 197	—0,05 384	—0,18 085
6	0,31 021	0	0,04 882	0	—0,86 845	3,00 000	—1,53 511	0	—0,28 452	0	—0,35 645
7	0,30 715	0,00 853	0,07 127	—0,02 946	0	—1,13 180	3,84 945	—1,96 574	—0,15 358	—0,23 486	—0,53 203
8	0,31 440	0	0,08 577	0	—0,03 916	0	—1,53 937	5,19 607	—2,91 443	0	—1,18 557
9	0,28 452	0,06 168	0	0,11 956	—0,13 205	0,11 784	—0,28 452	—1,68 286	6,67 352	—3,71 188	—1,83 918
10	0,31 596	0	0,09 535	0	0,02 441	0	—0,14 227	0	—2,97 059	11,19 624	—10,04 747
11	0	0,64 310	—0,89 513	1,37 884	—1,79 031	2,35 630	—3,10 093	3,89 217	—5,78 639	4,03 161	4,53 264

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\left[1 + \frac{1}{\pi}\frac{a}{(1+b\xi)^2}\left(1 + \frac{1+b}{b}\ln(1+b) + (1-2\xi-b\xi^2)\ln\frac{\xi}{1-\xi} + b\xi\right)\right].$$

b) Ähnliche Profilformen erhält man, wenn man zwei Parallelbögen für Vorder- und Hinterteil verwendet.

$$y(\xi) = \frac{t}{2}\left[1 - \left(\frac{\xi-\xi_t}{\xi_t}\right)^2\right] \qquad (0 \le \xi \le \xi_t),$$

$$= \frac{t}{2}\left[1 - \left(\frac{\xi-\xi_t}{1-\xi_t}\right)^2\right] \qquad (\xi_t \le \xi \le 1).$$

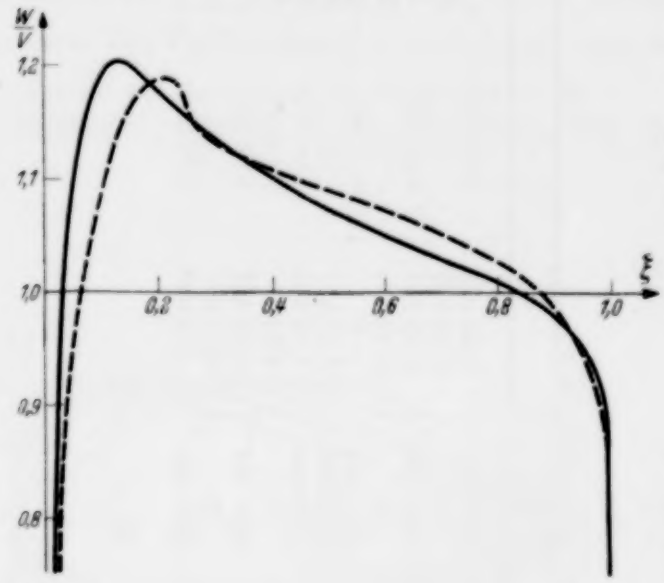
Die Geschwindigkeitsverteilung bei symmetrischer Anströmung errechnet sich dann zu

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\left\{1 + \frac{t}{\pi}\left[\frac{1}{\xi_t}\left(1 - \frac{\xi-\xi_t}{\xi_t}\ln\left|\frac{\xi}{\xi-\xi_t}\right|\right) + \frac{1}{1-\xi_t}\left(1 - \frac{\xi-\xi_t}{1-\xi_t}\ln\left|\frac{\xi-\xi_t}{1-\xi}\right|\right)\right]\right\}.$$

An der Stelle $\xi = \xi_t$ ergibt sich

$$\frac{W}{V} = 1 + \frac{t}{\pi}\frac{1}{\xi_t(1-\xi_t)}.$$

An dieser Stelle hat die Geschwindigkeitsverteilung infolge des unstetigen Krümmungsverlaufes die bekannte senkrechte Wendetangente (Abb. 2).



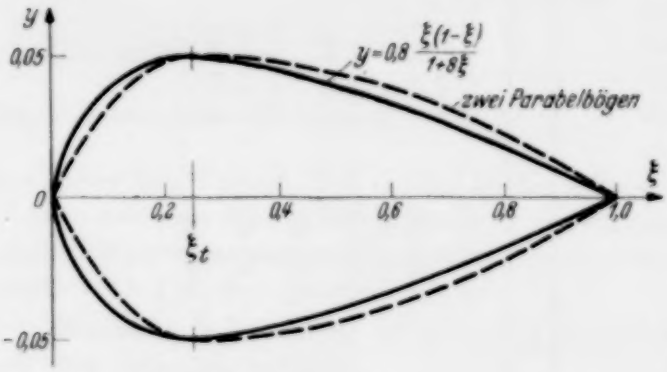


Abb. 2. Geschwindigkeitsverteilung an symmetrischen Profiltropfen ($t = 0{,}1$, $\xi_t = 0{,}25$).

c) Benutzt man den beim ersten Beispiel verwendeten Ansatz zur Beschreibung einer dünnen gewölbten Platte mit veränderlicher Wölbungsrücklage, dann gilt:

$$y(\xi) = a\frac{\xi(1-\xi)}{1+b\xi} \quad \text{mit} \quad a = \frac{f}{\xi_f^2}$$

und $$b = \frac{1-2\xi_f}{\xi_f^2}.$$

Dabei ist f die größte Wölbung und ξ_f die Wölbungsrücklage ($0 \le \xi_f \le 1$).

Durch Einführung der Polarkoordinaten $\xi = \frac{1}{2}(1+\cos\varphi)$ formen wir wie folgt um:

$$y(\varphi) = c\frac{\sin^2\varphi}{d+\cos\varphi}$$

mit $$c = \frac{1}{2}\frac{a}{b} = \frac{1}{2}\frac{f}{1-2\xi_f}$$

und $$d = \frac{2+b}{b} = \frac{1-2\xi_f+2\xi_f^2}{1-2\xi_f}.$$

Setzen wir jetzt diese Formel in die Integralformeln des Abschnittes 2 ein, dann lassen sich nach Ausführung der Integrationen die Profileigenschaften wie folgt finden:

Nullauftriebswinkel $$a_0 = -\frac{f}{1-\xi_f};$$

Nullmoment $$c_{m_0} = -f\frac{\pi}{2}\frac{\xi_f(3-2\xi_f)}{1-\xi_f};$$

Lage der durch die Wölbung hervorgerufenen Auftriebskraft $\xi_a = \frac{1}{4}[1+\xi_f(3-2\xi_f)]$;

Anstellwinkel des stoßfreien Eintritts $\alpha_s = \frac{f}{2}\frac{1-2\xi_f}{\xi_f(1-\xi_f)}$;

Auftriebsbeiwert des stoßfreien Eintritts $c_{a_s} = f\frac{\pi}{\xi_f(1-\xi_f)}$.

(Eingegangen am 20. Januar 1950.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *E. Truckenbrodt*. (20b) Braunschweig, Andreeplatz 5.

Berichtigung

zu meiner Arbeit in Bd. XVII, S. 94 des Ingenieur-Arch.: „Das Umströmungsproblem bei inkompressiblen Potentialströmungen (II)".

Von F. Riegels.

S. 97, Zeile 26 und 34: Normalgeschwindigkeit (statt Abwärtsgeschwindigkeit); Gl. (28) unter der Wurzel: x^2 (statt x).

S. 98, Gl. (30) und (33) letzter Klammerausdruck: $(2/l)\,y^{(l)}$ (statt $y^{(l)}$).

S. 101, Gl. (51): C_{mn} (statt C_n) und in der Klammer im Nenner: $-$ (statt $+$); Zeile 8: y_{2N-m} (statt y_{2N-n}).

S. 102, Formel für A_{mn}, C_{mn}: $\mp$ (statt $\pm$); Formel für B_{mn}, D_{mn}: $m-n$ (statt $m-\pi$).

S. 105, nach Gl. (69): $d_0 = 1 - \frac{1}{4}\,l_1$ $\left(\text{statt } d_0 = 1 + \frac{1}{8}\,l_1 + \frac{3}{8}\,l_2\right)$; Gl. (71): $-2f$ (statt $2f$).

Füge unten auf S. 102 hinzu:

$$a_n = -\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{N}, \qquad b_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{N}, \qquad c_n = a_n^2,$$

$$A_{m,2N-n} = -A_{mn}, \qquad B_{m,2N-n} = B_{mn},$$

$$C_{m,2N-n} = C_{mn}, \qquad D_{m,2N-n} = -D_{mn},$$

$$G_{m,2N-n} = G_{mn}, \qquad G_{Nn} = \frac{-1+(-1)^{N+n}}{N\left(1+\cos\frac{n\pi}{N}\right)}.$$

(Eingegangen am 19. Juni 1950.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Fritz Riegels*, (20b) Göttingen, Zeppelinstr. 4.

Zur Ermittlung der Eigenschwingungszahlen der in ihrer Mittelebene belasteten Rechteckplatte.

Von H. Eschler.

1. Einleitung. Während die Biegungsschwingungen einer in ihrer Ebene belasteten, am Rand eingespannten Kreisplatte von *K. Federhofer*[1] behandelt wurden, scheinen die Biegungsschwingungen der durch gleichmäßig verteilte Randdruck- oder -zugkräfte beanspruchten Rechteckplatte außer für den einfachen Fall einer allseitig freien Stützung[2] noch nicht näher untersucht zu sein. Wir stellen uns im folgenden die Aufgabe, neben der strengen Lösung für zwei verschiedene Auflagerbedingungen Näherungsformeln für sämtliche Eigenschwingungszahlen unter beliebig vorgegebenen Randbedingungen zu entwickeln und die Brauchbarkeit dieser Formeln an Hand der exakten Werte zu überprüfen.

2. Grundformeln. Die Auslenkung eines Punktes x, y der Mittelebene der Platte zur Zeit t sei ζ. Dann lautet die Differentialgleichung der Biegungsschwingungen einer auf den zwei Seitenpaaren $x=0$ und $x=a$ bzw. $y=0$ und $y=b$ mit den Druckkräften je Längeneinheit p_1 bzw. p_2 belasteten Rechteckplatte

$$N \Delta\Delta \zeta + p_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + p_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \varrho h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0 . \tag{1}$$

Hierin ist ϱ die Dichte und $N = Eh^3/12\,(1-\nu^2)$ die Biegungssteifigkeit der Platte, wenn h die Plattendicke, E den Elastizitätsmodul und ν die Querdehnungszahl bezeichnen.

Mit

$$\zeta = w(x, y) \sin(\omega t + \varepsilon), \tag{2}$$

wobei w eine Funktion von x und y allein sein soll und ω die Kreisfrequenz bedeutet, erhält man aus (1) für die Eigenfunktionen w die Differentialgleichung

$$N \Delta\Delta w + p_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \varrho h \omega^2 w = 0 . \tag{3}$$

Ist im besonderen die Platte auf den zwei Seiten $y=0$ und $y=b$ frei gestützt, so können wir w in der Form

$$w = f(x) \sin \frac{n \pi y}{b} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

ansetzen, womit den Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} & w = 0 , \\ & \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für } y = 0 \text{ und } y = b$$

genügt ist. Aus (3) folgt dann für $f(x)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^4 f}{d x^4} - \frac{\pi^2}{a^2}\left(2 n^2 \frac{a^2}{b^2} - P_1\right)\frac{d^2 f}{d x^2} + \frac{\pi^4}{a^4}\left(n^4 \frac{a^4}{b^4} - n^2 \frac{a^4}{b^4} P_2 - \lambda^2\right) f = 0 \tag{4}$$

mit den Abkürzungen

$$P_1 = \frac{a^2 p_1}{\pi^2 N} , \qquad P_2 = \frac{b^2 p_2}{\pi^2 N} \quad \text{und} \quad \lambda^2 = \frac{a^4 \varrho h}{\pi^4 N} \omega^2 . \tag{5}$$

Die potentielle Energie U der Platte ist gegeben durch

$$U = \int\int \left\{ \frac{N}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\, \partial y}\right)^2 \right] - \frac{p_1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 - \frac{p_2}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 \right\} d x\, d y ,$$

[1] *K. Federhofer*, Ing.-Arch. 6 (1935), S. 68.
[2] *A. Nádai*, Die elastischen Platten, S. 262 und 263. Berlin 1925.

während für die kinetische Energie T gilt

$$T = \frac{\varrho h}{2} \int\int \dot{\zeta}^2 \, dx \, dy \, .$$

Mit (2) erhält man daraus für die maximale potentielle bzw. kinetische Energie

$$\left.\begin{aligned} U_{max} = \int\int \Big\{ \frac{N}{2} \Big[\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big)^2 + 2\,\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\,(1-\nu) \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} \Big)^2 \Big] - \\ - \frac{p_1}{2} \Big(\frac{\partial w}{\partial x} \Big)^2 - \frac{p_2}{2} \Big(\frac{\partial w}{\partial y} \Big)^2 \Big\} \, dx \, dy \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

bzw.

$$T_{max} = \frac{\varrho h}{2} \omega^2 \int\int w^2 \, dx \, dy \, , \tag{7}$$

woraus nach der Energiegleichung

$$\omega^2 = \frac{2}{\varrho h} \frac{U_{max}}{\int\int w^2 \, dx \, dy} \tag{8}$$

folgt.

I. Strenge Lösungen.

3. Die auf den Seiten $x = 0$ und $x = a$ eingespannte und auf den Seiten $y = 0$ und $y = b$ frei aufliegende Platte. Im Falle von in der x-Richtung symmetrischen Schwingungen werde

$$f(x) = A \cos \pi\gamma \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) + B \, \mathfrak{Cof}\, \pi\delta \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right)$$

angenommen, welcher Ansatz (4) dann genügt, wenn

$$\left.\begin{matrix} \gamma^2 \\ \delta^2 \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{P_1^2}{4} - n^2 \frac{a^2}{b^2} P_1 + n^2 \frac{a^4}{b^4} P_2 + \lambda^2} \pm \left(\frac{P_1}{2} - n^2 \frac{a^2}{b^2} \right). \tag{9}$$

Aus den Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} w &= 0 \, , \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für } x = 0 \text{ und } x = a \tag{10}$$

erhält man das Verhältnis der beiden Beiwerte

$$\frac{A}{B} = - \frac{\mathfrak{Cof}\, \frac{\pi\delta}{2}}{\cos \frac{\pi\gamma}{2}}$$

und die zur Bestimmung der Eigenwerte λ dienende Gleichung

$$\gamma \operatorname{tg} \frac{\pi\gamma}{2} + \delta \, \mathfrak{Tg}\, \frac{\pi\delta}{2} = 0 \, . \tag{11}$$

Analog bekommen wir mit

$$f(x) = C \sin \pi\gamma \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) + D \, \mathfrak{Sin}\, \pi\delta \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right)$$

für die in der x-Richtung antisymmetrischen Schwingungen

$$\frac{C}{D} = - \frac{\mathfrak{Sin}\, \frac{\pi\delta}{2}}{\sin \frac{\pi\gamma}{2}}$$

und

$$\gamma \operatorname{ctg} \frac{\pi\gamma}{2} - \delta \, \mathfrak{Ctg}\, \frac{\pi\delta}{2} = 0 \, . \tag{12}$$

Werte von λ sind in Tabelle 2 von Ziff. 6 für den Grundton bei verschiedenen Seitenverhältnissen a/b und veränderlicher Belastung angegeben. Man erhält sie als die niedrigsten Wurzeln von (11) mit $n = 1$. Tabelle 3 enthält λ für einige Obertöne der quadratischen Platte.

4. Die auf den Seiten $x = 0$ und $x = a$ ganz freie und auf den Seiten $y = 0$ und $y = b$ frei aufliegende Platte. Da ein auf die Seiten $x = 0$ und $x = a$ wirkender Druck hier kaum von praktischer Bedeutung sein dürfte, nehmen wir $p_1 = 0$ an.

Macht man für die symmetrischen Schwingungen in der x-Richtung den Ansatz

$$f(x) = A' \cos \pi \gamma' \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right) + B' \mathfrak{Cof}\, \pi \delta' \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right),$$

so folgt durch Einführen dieses in (4)

$$\left.\begin{matrix} \gamma'^2 \\ \delta'^2 \end{matrix}\right| = \sqrt{n^2 \frac{a^4}{b^4} P_2 + \lambda^2} \mp n^2 \frac{a^2}{b^2}.$$

Da an den Rändern $x = 0$ und $x = a$ Biegungsmoment und Stützkraft verschwinden müssen, gelten die Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{d^2 w}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x\, \partial y^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } x = 0 \text{ und } x = a, \tag{13}$$

welche nach kurzer Rechnung auf den Quotienten

$$\frac{A'}{B'} = \frac{\left(\delta'^2 - \nu n^2 \frac{a^2}{b^2}\right) \mathfrak{Cof} \frac{\pi \delta'}{2}}{\left(\gamma'^2 + \nu n^2 \frac{a^2}{b^2}\right) \cos \frac{\pi \gamma'}{2}}$$

und die Gleichung

$$\gamma' \operatorname{tg} \frac{\pi \gamma'}{2} + \left(\frac{\gamma'^2 + \nu n^2 \frac{a^2}{b^2}}{\delta'^2 - \nu n^2 \frac{a^2}{b^2}}\right)^2 \delta' \mathfrak{Tg} \frac{\pi \delta'}{2} = 0 \tag{14}$$

führen. Aus dieser ist wieder λ zu ermitteln.

Auf dieselbe Weise erhält man für die antisymmetrischen Schwingungen mit

$$f(x) = C' \sin \pi \gamma' \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right) + D' \mathfrak{Sin}\, \pi \delta' \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right)$$

das Verhältnis

$$\frac{C'}{D'} = \frac{\left(\delta'^2 - \nu n^2 \frac{a^2}{b^2}\right) \mathfrak{Sin} \frac{\pi \delta'}{2}}{\left(\gamma'^2 + \nu n^2 \frac{a^2}{b^2}\right) \sin \frac{\pi \gamma'}{2}}$$

und die Beziehung für λ

$$\gamma' \operatorname{ctg} \frac{\pi \gamma'}{2} - \left(\frac{\gamma'^2 + \nu n^2 \frac{a^2}{b^2}}{\delta'^2 - \nu n^2 \frac{a^2}{b^2}}\right)^2 \delta' \mathfrak{Ctg} \frac{\pi \delta'}{2} = 0. \tag{15}$$

In den Tabellen 5 und 6 von Ziff. 8 sind einige Zahlenwerte von λ zusammengestellt.

Es wird später von Wichtigkeit sein, daß n keinen Einfluß auf die Anzahl der Nullstellen der Funktionen $f(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq a$ hat. Diese Anzahl hängt vielmehr nur davon ab, der wievielten Wurzelserie λ angehört.

Die Gleichungen (11), (12), (14) und (15) gestatten auch, die zugehörigen Knickungsaufgaben zu erledigen. Man braucht hierin nur, wie aus (3) und (5) ersichtlich, $\lambda = 0$ zu setzen.

Grundsätzlich lassen sich streng auch schwierigere Aufgaben als die soeben behandelten lösen, doch ist die dabei zu leistende Rechenarbeit sehr groß. Das zeigt schon das Beispiel der vierseitig eingespannten, in ihrer Ebene aber unbelasteten Platte[1]. Wir wollen deswegen im zweiten Teil Näherungsformeln ableiten, welche eine schnelle Ermittlung der Eigenschwingungszahlen nicht nur für die bisher entwickelten Fälle, sondern auch für solche verwickelterer Natur gestatten.

[1] Vgl. z. B. S. *Iguchi*. Ing.-Arch. 8 (1937), S. 11.

II. Näherungslösungen.

5. Näherungslösung nach Sezawa für die auf den Seiten $x = 0$ und $x = a$ eingespannte und auf den Seiten $y = 0$ und $y = b$ frei aufliegende Platte. Mit den Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\alpha}{\pi^2} &= \frac{P_1}{2} - n^2\frac{a^2}{b^2} \\ \frac{\beta^2}{\pi^4} &= -n^4\frac{a^4}{b^4} + n^2\frac{a^4}{b^4}P_2 + \lambda^2 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

läßt sich (11) wegen (9) auch schreiben:

$$\sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha} + \sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}\,\mathfrak{Tg}\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha} = 0\,.$$

Auf Grund der graphischen Darstellung konnte *K. Sezawa*[1] bei der Untersuchung von Stabschwingungen diese Gleichung für den Grundton näherungsweise durch

$$\beta^2 = 500\left(1 + \frac{1}{19{,}7}\alpha\right)$$

ersetzen. Daraus erhält man mit (16)

$$\lambda^2 = 5{,}13 + 2{,}57\,n^2\frac{a^2}{b^2} + n^4\frac{a^4}{b^4} - 1{,}286\,P_1 - n^2\frac{a^4}{b^4}P_2\,. \tag{17}$$

und aus dieser Formel kann man für gegebene Werte a/b, p_1 und p_2 leicht die erste Wurzelserie von λ berechnen, indem man $n = 1, 2, 3 \ldots$ annimmt.

Die einfache Form von (17) legt den Gedanken nahe, mittels geeigneter Näherungsansätze für w sämtliche Eigenschwingungszahlen durch ebenso einfache Beziehungen darzustellen. Dabei wollen wir uns des bekannten Verfahrens von *Raleigh* bedienen.

6. Die auf den Seiten $x = 0$ und $x = a$ eingespannte und auf den Seiten $y = 0$ und $y = b$ frei aufliegende Platte. Mit Rücksicht auf die in Ziff. 4 gemachte Bemerkung, daß die Anzahl der Nullstellen der Funktion $f(x)$ unabhängig von n ist, können wir die Eigenfunktionen w durch den Ansatz

$$w = X_m\,Y_n \tag{18}$$

annähern, wobei X_m und Y_n die entsprechend gewählten Eigenfunktionen des transversal schwingenden Stabes sein sollen.

In dem vorliegenden Fall haben wir dann für X_m die Eigenfunktionen des an beiden Enden eingespannten Stabes zu nehmen, während $Y_n = \sin\frac{n\pi y}{b}$ ist. Für die in der x-Richtung symmetrischen Schwingungen gilt also

$$X_m = \mathfrak{Cof}\frac{k_m}{2}\cos k_m\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right) - \cos\frac{k_m}{2}\,\mathfrak{Cof}\,k_m\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right) \tag{19a}$$

bzw. für die antisymmetrischen Schwingungen

$$X_m = \mathfrak{Sin}\frac{k_m}{2}\sin k_m\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right) - \sin\frac{k_m}{2}\,\mathfrak{Sin}\,k_m\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right). \tag{19b}$$

Der Ansatz (18) genügt den Randbedingungen (10), wenn die Werte von k_m aus

$$\operatorname{tg}\frac{k_m}{2} + \mathfrak{Tg}\frac{k_m}{2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{tg}\frac{k_m}{2} - \mathfrak{Tg}\frac{k_m}{2} = 0$$

ermittelt werden.

Nach dem *Rayleigh*schen Verfahren haben wir mit dem Näherungsansatz (18) die maximale potentielle und kinetische Energie gemäß (6) und (7) zu berechnen und in die Energiegleichung einzusetzen. Bei der Auswertung der auftretenden Integrale macht man zweckmäßigerweise von den beiden in der Theorie der Stabschwingungen abgeleiteten Hilfssätzen

$$\int_0^a X_m^2\,dx = \frac{a}{4}\left[X_m^2 - 2\frac{a^4}{k_m^4}\frac{dX_m}{dx}\frac{d^3X_m}{dx^3} + \frac{a^4}{k_m^4}\left(\frac{d^2X_m}{dx^2}\right)^2\right]_{x=a}$$

[1] *K. Sezawa*, Z. angew. Math. Mech. 12 (1932), S. 275; insbesondere S. 277, die Gleichungen (21) und (22).

und

$$\int_0^a \left(\frac{d^2 X_m}{d x^2}\right)^2 d x = \frac{k_m^4}{a^4} \int_0^a X_m^2 \, d x$$

Gebrauch. Mit den Abkürzungen (5) erhält man nach einiger Rechnung aus (8)

$$\left.\begin{aligned} \lambda^2 = \frac{k_m^4}{\pi^4} + \frac{2 n^2 k_m K_m (k_m K_m - 2)}{\pi^2} \frac{a^2}{b^2} + n^4 \frac{a^4}{b^4} - \\ - \frac{k_m K_m (k_m K_m - 2)}{\pi^2} P_1 - n^2 \frac{a^4}{b^4} P_2 \\ (m, n = 1. 2. 3 \ldots) . \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Hierin ist

$$K_m = \begin{cases} \mathfrak{Tg} \dfrac{k_m}{2} \text{ für die in der } x\text{-Richtung symmetrischen Schwingungen,} \\ \mathfrak{Ctg} \dfrac{k_m}{2} \text{ für die in der } x\text{-Richtung antisymmetrischen Schwingungen.} \end{cases}$$

Tabelle 1 gibt eine Zusammenstellung der ersten fünf Werte von k_m und K_m.

Tabelle 1. *Die Werte von k_m und K_m für $m = 1$ bis 5.*

m	1	2	3	4	5
k_m	4,73004	7,85320	10,99561	14,13717 ($\approx 4{,}5\,\pi$)	17,27876 ($\approx 5{,}5\,\pi$)
K_m	0,98250	1,00078	0,99997	1,00000	1,00000

Für $m = 1$ wird aus (20)

$$\lambda^2 = 5{,}139 + 2{,}493\, n^2 \frac{a^2}{b^2} + n^4 \frac{a^4}{b^4} - 1{,}247\, P_1 - n^2 \frac{a^4}{b^4} P_2 .$$

Der Vergleich mit der Formel (17) nach *Sezawa* zeigt eine gute Übereinstimmung.

Die Beziehung (20) ermöglicht also in müheloser Form die näherungsweise Berechnung aller Eigenschwingungszahlen der Platte unter den vorgegebenen Grenzbedingungen, indem man m und n die ganzen Zahlen 1, 2, 3 ... durchlaufen läßt. Ungerade m bzw. n ergeben die Eigenschwingungszahlen von in der x- bzw. y-Richtung symmetrischen, gerade m bzw. n die von antisymmetrischen Schwingungen. Darüber hinaus erhält man aus (20), wenn $\lambda = 0$ gesetzt wird, auch Näherungswerte der kritischen Drucke p_1 und p_2 für das Ausknicken der Platte.

Bekanntlich sind die mittels des *Rayleigh*schen Verfahrens errechneten Eigenwerte etwas zu hoch. Wie groß diese Abweichungen im vorliegenden Falle sind, zeigt zunächst Tabelle 2, in welcher λ für den Grundton, also $m = n = 1$, bei drei verschiedenen Seitenverhältnissen a/b und für veränderliches P_1 unter der Annahme $p_1 = p_2$ nach (20) und, jeweils in Klammer, streng nach (11) berechnet wurde. Positive P_1 entsprechen hierbei Druck-, negative Zugkräften. Die größte Zugkraft wurde etwa entgegengesetzt gleich der Knicklast gewählt.

Tabelle 2. *Werte von λ für die Grundschwingung bei $p_1 = p_2$ nach (20), in Klammer die strengen Werte nach (11)*

$\frac{a}{b}$	P_1	λ	Abweichung in %	$\frac{a}{b}$	P_1	λ	Abweichung in %	$\frac{a}{b}$	P_1	λ	Abweichung in %
	— 4	3,295 (3,279)	0,5		— 4	4,197 (4,173)	0,6		— 10	14,53 (14,44)	0,6
	— 2	2,854 (2,848)	0,2		— 2	3,623 (3,609)	0,4		— 5	12,64 (12,57)	0,6
	0	2,330 (2,329)	0,1		0	2,938 (2,933)	0,2		0	10,42 (10,36)	0,6
$\frac{1}{3}$	1,5	1,842 (1,838)	0,2	1	1,5	2,294 (2,293)	0,1	3	4	8,221 (8,167)	0,7
	3	1,164 (1,135)	2,6		3	1,376 (1,373)	0,2		8	5,158 (5,108)	1,0
	3,998 (3,905)	0	2,4		3,842 (3,830)	0	0,3		10,60 (10,57)	0	0,3

Wie man sieht, bleiben die Abweichungen der Näherungswerte λ von den genauen Werten normalerweise unter 1%. Nur wenn sich P_1 dem kritischen Wert für das Ausknicken nähert, können die Fehler etwas größer werden. Praktisch scheint dieser Belastungsfall aber aus Sicherheitsgründen weniger von Interesse.

Tabelle 3 enthält λ für einige Obertöne der quadratischen Platte bei $P_1 = P_2 = 3$, also einer Belastung, die etwas unter der kleinsten Knicklast liegt. Die genauen Werte sind wieder in der Klammer angeführt.

Tabelle 3. *Werte von λ für einige Obertöne der quadratischen Platte bei $P_1 = P_2 = 3$ nach* (20), *in Klammer die strengen Werte nach* (11) *und* (12).

m	2	3	5	7	8	1	10
n	2	4	5	6	8	10	1
λ	8,147 (8,134)	25,47 (25,39)	52,18 (52,11)	88,90 (88,85)	132,21 (132,10)	99,75 (99,59)	109,77 (109,77)
Abweichung in%	0,2	0,3	0,1	0,1	0,1	0,2	0,0

Auch diese Ergebnisse sind sehr befriedigend und die auftretenden Abweichungen in den meisten Fällen wohl praktisch ohne Belang.

7. Die auf allen vier Seiten eingespannte Platte. Wenn hier die Eigenfunktionen w der strengen Lösung auch nicht mehr als einfaches Produkt einer Funktion von x allein mal einer Funktion von y allein darstellbar sind, so läßt sich für die Näherungslösung doch ohne weiteres der Ansatz (18) verwenden.

Um den Randbedingungen zu genügen, nehmen wir für X_m die Ausdrücke (19a) bzw. (19b) und für Y_n im Falle von in der y-Richtung symmetrischen Schwingungsflächen

$$Y_n = \mathfrak{Cof}\,\frac{k_n}{2}\cos k_n\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right) - \cos\frac{k_n}{2}\,\mathfrak{Cof}\,k_n\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right) \tag{21a}$$

bzw. antisymmetrischen Schwingungsflächen

$$Y_n = \mathfrak{Sin}\,\frac{k_n}{2}\sin k_n\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right) - \sin\frac{k_n}{2}\,\mathfrak{Sin}\,k_n\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right). \tag{21b}$$

Hierbei sind die k_n die Wurzeln der Periodengleichungen

$$\operatorname{tg}\frac{k_n}{2} + \mathfrak{Tg}\,\frac{k_n}{2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{tg}\frac{k_n}{2} - \mathfrak{Tg}\,\frac{k_n}{2} = 0\,.$$

Die Anwendung des *Rayleigh*schen Prinzips in Form von (8) mit (6) führt auch hier auf die Näherungsformel für die Eigenschwingungszahlen

$$\left.\begin{aligned}\lambda^2 = \frac{1}{\pi^4}\Big[k_m^4 + 2\,k_m K_m (k_m K_m - 2)\,k_n K_n (k_n K_n - 2)\,\frac{a^2}{b^2} + k_n^4\,\frac{a^4}{b^4}\Big] - \\ - \frac{1}{\pi^2}\Big[k_m K_m (k_m K_m - 2)\,P_1 - k_n K_n (k_n K_n - 2)\,\frac{a^4}{b^4}\,P_2\Big] \\ (m, n = 1, 2, 3 \ldots)\,.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Die Größen k_m, K_m, k_n und K_n ergeben sich aus Tabelle 1. Hierin hat man zur Gewinnung der k_n und K_n nur n an Stelle von m zu nehmen.

Durch (22) sind alle Frequenzen der auf den vier Seiten eingespannten Platte gegeben, wenn man $m, n = 1, 2, 3 \ldots$ setzt. Eine Kontrolle der Näherungsformel war für $p_1 = p_2 = 0$ möglich, wobei die exakten Werte einer Arbeit von *S. Iguchi*[1] entnommen werden konnten. Die nachstehende Tabelle 4 gibt eine Zusammenstellung der Näherungswerte nach (22) und der strengen Ergebnisse *Iguchis*.

Die Fehler der angeführten Näherungswerte λ übersteigen also 0,5% nicht.

[1] *S. Iguchi*, Die Eigenwertprobleme für die elastische rechteckige Platte, S. 331 bis 343. Sapporo 1938.

Tabelle 4. *Werte von λ nach (22) für $p_1 = p_2 = 0$, in Klammer die strengen Werte.*

$\frac{b}{a}$	1	2	3	1				
m	1			1	2	1	3	2
n	1			2	2	3	2	4
λ	3,659 (3,646)	2,497 (2,489)	2,355 (2,350)	7,471 (7,437)	11,03 (10,97)	13,42 (13,39)	16,81 (16,72)	24,73 (24,63)
Abweichung in %	0,4	0,3	0,2	0,5	0,5	0,2	0,5	0,4

8. Die auf den Seiten $x = 0$ und $x = a$ ganz freie und auf den Seiten $y = 0$ und $y = b$ frei aufliegende Platte. Es liegt hier nahe, für X_m die Eigenfunktionen des an beiden Enden freien Stabes zu wählen, während Y_n durch $\sin \frac{n\pi y}{b}$ gegeben ist. Dieser Ansatz genügt zwar nicht den Randbedingungen (13), doch läßt sich an Hand von Zahlenbeispielen zeigen, daß die auf diesem Wege gewonnene Beziehung für λ trotzdem sehr brauchbare Ergebnisse liefert.

Wir setzen also für die symmetrischen Schwingungen in der x-Richtung

$$X_m = \mathfrak{Coj} \frac{k_m}{2} \cos k_m \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right) + \cos \frac{k_m}{2} \mathfrak{Coj} k_m \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right), \tag{23a}$$

worin k_m aus

$$\operatorname{tg} \frac{k_m}{2} + \mathfrak{Tg} \frac{k_m}{2} = 0$$

zu bestimmen ist. Für die in der x-Richtung antisymmetrischen Schwingungen gilt

$$X_m = \mathfrak{Sin} \frac{k_m}{2} \sin k_m \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right) + \sin \frac{k_m}{2} \mathfrak{Sin} k_m \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right) \tag{23b}$$

mit der Periodengleichung

$$\operatorname{tg} \frac{k_m}{2} - \mathfrak{Tg} \frac{k_m}{2} = 0 .$$

Nach Errechnung der potentiellen Energie (6), wobei wie schon in Ziff. 4 $p_1 = 0$ angenommen werden soll, finden wir aus (8) mit (5) den Näherungswert

$$\lambda^2 = \frac{k_m^4}{\pi^4} + \frac{2 n^2 k_m K_m [k_m K_m + 2(3 - 4\nu)]}{\pi^2} \frac{a^2}{b^2} + n^4 \frac{a^4}{b^4} - n^2 \frac{a^4}{b^4} P_2 \quad (m, n = 1, 2, 3 \ldots) . \tag{24}$$

Die Werte von k_m und K_m sind aus Tabelle 1 zu entnehmen. Ungerade m bzw. n führen auf die Frequenzen von in der x- bzw. y-Richtung symmetrischen, ungerade m bzw. n auf solche von antisymmetrischen Schwingungen.

In Tabelle 5 sind die Werte von λ für die Grundschwingung bei verschiedenen Seitenverhältnissen und veränderlichem P_2 ausgerechnet. Der genaue Wert von λ nach (14) ist jeweils in Klammer beigefügt. Für die Querdehnungszahl wurde $\nu = 3/10$ angenommen.

Tabelle 5. *Werte von λ für den Grundton nach (24) bei $\nu = 3/10$, in Klammer die strengen Werte nach (14).*

$\frac{a}{b}$	$\frac{a^2}{b^2} P_2$	λ	Abweichung in %	$\frac{a}{b}$	$\frac{a^2}{b^2} P_2$	λ	Abweichung in %	$\frac{a}{b}$	$\frac{a^2}{b^2} P_2$	λ	Abweichung in %
	— 50	3,401 (3,397)	0,1		— 15	5,376 (5,371)	0,1		— 20	18,33 (18,24)	0,5
	— 25	2,965 (2,960)	0,2		— 7,5	4,627 (4,620)	0,2		— 10	15,69 (15,59)	0,6
$\frac{1}{3}$	0	2,452 (2,447)	0,2	1	0	3,729 (3,721)	0,2	3	0	12,49 (12,37)	1,0
	20	1,947 (1,940)	0,4		5	2,985 (2,974)	0,4		6	10,102 (9,944)	1,6
	40	1,253 (1,242)	0,9		10	1,976 (1,961)	0,8		12	6,932 (6,700)	3,5
	54,13 (53,89)	0	0,4		13,91 (13,85)	0	0,4		17,34 (16,99)	0	2,1

Wie schon bei den in Ziff. **6** behandelten Grenzbedingungen stellen wir auch hier etwas größere Fehler beim Anwachsen von p_2 gegen die Knicklast fest.

In der nachfolgenden Tabelle 6 sind endlich noch die Eigenwerte λ einer Anzahl von Obertönen der quadratischen Platte für $P_2 = 10$ aufgeführt. Die praktische Brauchbarkeit der Näherungsformel (24) wird auch durch diese Zahlenwerte dargetan.

Tabelle 6. *Werte von λ für einige Obertöne der quadratischen Platte bei $P_2 = 10$ und $\nu = 3/10$ nach* (24), *in Klammer die strengen Werte nach* (14) *und* (15).

m	2	3	5	7	8	1	10
n	2	4	5	6	8	10	1
λ	9,383 (9,304)	27,68 (27,43)	55,84 (55,61)	93,64 (93,43)	138,46 (138,06)	98,90 (98,36)	111,31 (111,31)
Abweichung in %	0,8	0,9	0,4	0,2	0,3	0,5	0,0

9. Die auf den Seiten $x = 0$ und $x = a$ ganz freie und auf den Seiten $y = 0$ und $y = b$ eingespannte Platte. Die Näherungsfunktionen w nach (18) wird man für diese Randbedingungen aus (23a) bzw. (23b) für X_m und (21a) bzw. (21b) für Y_n zusammensetzen. Unter der Annahme $p_1 = 0$ ergibt sich die Näherungsformel für λ nach (6), (8) und (5)

$$\lambda^2 = \frac{1}{\pi^4}\left\{k_m^4 + 2\,k_m K_m\,[k_m K_m + 2\,(3 - 4\,\nu)]\,k_n K_n\,(k_n K_n - 2)\,\frac{a^2}{b^2} + k_n^4\,\frac{a^4}{b^4}\right\} - \frac{1}{\pi^2}\,k_n K_n\,(k_n K_n - 2)\,\frac{a^4}{b^4}\,P_2 \qquad (m, n = 1, 2, 3 \ldots)\,. \tag{25}$$

Die Werte von k_m, K_m, k_n und K_n sind durch Tabelle 1 gegeben, wobei für die k_n und K_n n an Stelle von m zu treten hat.

10. Schlußbemerkungen. Die Ermittlung der Eigenschwingungszahlen der in ihrer Ebene belasteten, transversal schwingenden Rechteckplatte erfordert schon für relativ einfachere Aufgaben, zu welchen die im ersten Abschnitt, Ziff. **3** und **4**, dargestellten zu zählen sind, einen ziemlichen Rechenaufwand. In noch viel höherem Maße gilt dies aber bei mathematisch schwieriger zu behandelnden Randbedingungen, wie z. B. bei der vollkommen eingespannten Platte. Es wurden daher im zweiten Abschnitt Formeln, die eine leichte näherungsweise Berechnung aller Eigenschwingungszahlen bei beliebigen Randbedingungen erlauben, hergeleitet.

Die Überprüfung der so ermittelten Frequenzen durch die nach der strengen Theorie berechneten ergab bei zwei speziellen Beispielen (Ziff. **6** und **8**) eine für praktische Bedürfnisse wohl meist ausreichende Übereinstimmung. Die nach einheitlichem Gesichtspunkt erfolgte Herleitung der Formeln legt den Gedanken nahe, diese Übereinstimmung auch dort zu vermuten, wo eine Kontrolle nur teilweise bzw. gar nicht, wie in den Ziff. **7** bzw. **9**, möglich war. Wo eine höhere Genauigkeit gefordert werden müßte, liefern die Näherungsformeln aber sehr willkommene Ausgangswerte zur leichteren Auffindung der genauen Eigenschwingungszahlen.

Die Näherungsformeln (20), (22), (24) und (25) zeigen auch in sehr anschaulicher Weise die Abhängigkeit der Eigenschwingungszahlen von der in der Ebene der Platte wirkenden Belastung, so insbesondere, daß bei wachsenden Druckkräften die Frequenz sinkt, während Zugkräfte eine Erhöhung bewirken. Schließlich gestatten die abgeleiteten Formeln noch die angenäherte Berechnung der kritischen Drucke für das Ausknicken der Platte, wenn man λ Null setzt.

(Eingegangen am 19. Mai 1950.)[1]

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Hans Eschler*, Töging a. Inn, Hauptstraße 81.

[1] Das Manuskript dieser Arbeit war schon am 27. April 1944 erstmals bei der Schriftleitung eingegangen und für das (nicht mehr erschienene) dritte Heft des Bandes XV (1945) des Ingenieur-Archivs bestimmt gewesen.

Über den Impulssatz für einen in der Flüssigkeit bewegten Körper.

Von W. Müller.

1. Einleitung. Im folgenden soll eine neue Ableitung des Impulssatzes für die Kraftwirkung auf einen in der idealen Flüssigkeit bewegten Körper gegeben werden unter Zugrundelegung der absoluten Bewegung der Flüssigkeit, bezogen auf ein mit dem Körper bewegtes System[1].

I. Allgemeine Ableitung.

2. Grundgleichung für die Absolutbewegung in bezug auf einen körperfesten Bezugspunkt. a) Die absolute Bewegung einer Flüssigkeit in der Umgebung eines bewegten Körpers erfüllt folgende Bedingungen. Im Unendlichen ist die von einem Potential Φ ableitbare Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = 0$, und zwar verschwindet $\mathfrak{v}$ mindestens wie $1/r^2$, wenn der von einem im Körper festen Punkt 0 ausgehend gedachte Fahrstrahl r ins Unendliche wächst. An der Oberfläche C des Körpers muß die Normalkomponente der Geschwindigkeit d. h. $\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n}$ ($\mathfrak{n}$ Einheitsvektor in der Normalenrichtung) gleich sein der Normalkomponente $\mathfrak{v}_0\cdot\mathfrak{n} + (\bar{\omega}_0\times\mathfrak{r})\cdot\mathfrak{n}$ der Bewegungsgeschwindigkeit des Randpunktes

$$\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n} = \nabla\Phi\cdot\mathfrak{n} = \mathfrak{v}_0\cdot\mathfrak{n} + (\bar{\omega}_0\times\mathfrak{r})\cdot\mathfrak{n} = (\mathfrak{v}_0 + \mathfrak{u})\cdot\mathfrak{n}\,, \tag{1}$$

wenn vorausgesetzt wird, daß die Bewegung des Körpers aus der Translation $\mathfrak{v}_0$ und der Drehung $\bar{\omega}_0$ besteht.

b) Die Änderung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ setzt sich aus drei Teilen zusammen, der lokalen Änderung, der konvektiven Änderung und der Änderung infolge Rotation. Wir haben also

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} + \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\cdot\nabla\mathfrak{v} + \bar{\omega}_0\times\mathfrak{v}\,. \tag{2}$$

Der hier auftretende Differentialquotient $d\mathfrak{r}/dt$ ist die relative Geschwindigkeit

$$\mathfrak{v}' = \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0 - \bar{\omega}_0\times\mathfrak{r} = \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0 - \mathfrak{u}\,.$$

Wir haben also für die Beschleunigung

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0 - \mathfrak{u})\cdot\nabla\mathfrak{v} + \bar{\omega}_0\times\mathfrak{v}\,. \tag{3}$$

Daraus entsteht dann folgende Druckgleichung:

$$\frac{1}{\varrho}\nabla p + \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0 - \mathfrak{u})\cdot\nabla\mathfrak{v} + \omega_0\times\mathfrak{v} = 0\,, \tag{4}$$

die wir sogleich benutzen werden, um die Druckwirkung auf den bewegten Körper zu berechnen. Das von der Flüssigkeit eingenommene Raumgebiet T wird begrenzt von der Oberfläche C des Körpers und der unendlich fernen Kugelfläche H, deren Mittelpunkt im Punkt 0 liegen möge. Beide Begrenzungsflächen werden wir zusammenfassend mit F bezeichnen.

3. Umformung der Druckgleichung. Für die Umgestaltung der Gleichung (4) benutzen wir folgende Vektorbeziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{v}\cdot\nabla\mathfrak{v} = \nabla\cdot\mathfrak{v}\,\mathfrak{v} - \mathfrak{v}\nabla\cdot\mathfrak{v} = \nabla\cdot\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}\,,\\
&\mathfrak{v}_0\cdot\nabla\mathfrak{v} = \nabla\cdot\mathfrak{v}_0\mathfrak{v}\,,\\
&\mathfrak{u}\cdot\nabla\mathfrak{v} = \nabla\cdot\mathfrak{u}\,\mathfrak{v} - \mathfrak{v}\nabla\cdot\mathfrak{u} = \nabla\cdot\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,,\\
&(\nabla\cdot\mathfrak{u} = \operatorname{div}(\bar{\omega}_0\times\mathfrak{r}) = \bar{\omega}_0\cdot\operatorname{rot}\mathfrak{r} - \mathfrak{r}\cdot\operatorname{rot}\bar{\omega}_0 = 0)\,.
\end{aligned}\right| \tag{5}$$

Damit geht unsere Druckgleichung über in

$$-\frac{1}{\varrho}\nabla p = \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathfrak{v}\,\mathfrak{v} - \nabla\cdot\mathfrak{v}_0\mathfrak{v} - \nabla\cdot\mathfrak{u}\,\mathfrak{v} + \bar{\omega}_0\times\mathfrak{v}\,. \tag{6}$$

[1] In der Bezeichnung der Vektor- und Dyadenoperationen habe ich mich dem Buche von *M. Lagally*, Vektorrechnung, Leipzig 1934 angeschlossen; ich verweise ferner auf *E. Lohr*, Vektor- und Dyadenrechnung, Berlin 1939.

4. Berechnung des Druckes auf die Grenzflächen. Multiplizieren wir mit dem Raumelement $d\tau$ und integrieren über das ganze Gebiet, so kommt

$$-\int_T \nabla p\, d\tau = \varrho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \omega_0 \times\right)\int_T \mathfrak{v}\, d\tau + \varrho\int_T \nabla\cdot\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}\, d\tau - \varrho\int_T \nabla\cdot\mathfrak{v}_0\mathfrak{v}\, d\tau - \varrho\int_T \nabla\cdot \mathfrak{u}\mathfrak{v}\, d\tau\,. \tag{7}$$

Auf die drei letzten Glieder läßt sich der auf Dyaden erweiterte *Gauß*sche Integralsatz anwenden

$$\int_T d\tau\, \nabla\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \int_F \mathfrak{n}\, df\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B} \qquad (\mathfrak{n}\text{ äußere Normale in Bezug auf } T). \tag{8}$$

Wegen

$$\int_T \nabla p\, d\tau = \int_F p\,\mathfrak{n}\, df$$

erhalten wir daher

$$-\int_F p\,\mathfrak{n}\, df = \varrho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\omega}_0 \times\right)\int_T \mathfrak{v}\, d\tau + \varrho\int_F \mathfrak{v}\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n}\, df - \varrho\int_F \mathfrak{v}\mathfrak{v}_0\cdot\mathfrak{n}\, df - \varrho\int \mathfrak{v}\,\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{n}\, df\,. \tag{9}$$

Benutzen wir nun die Randbedingung (1), so sieht man, daß die Randintegrale längs C sich aufheben. Ferner verschwinden die Flächenintegrale längs H_∞ wegen der Kugelsymmetrie; z. B. wird

$$\int_H p\,\mathfrak{n}\, df = p_\infty\int_H \mathfrak{n}\, df = 0\,.$$

Da ferner

$$\varrho\int_T \mathfrak{v}\, d\tau = \varrho\int_T \nabla\varphi\, d\tau = \varrho\int_C \varphi\,\mathfrak{n}\, df = \mathfrak{J} \tag{10}$$

den Impuls der Flüssigkeit bedeutet, so erhalten wir die grundlegende Formel

$$\int_C p\,\mathfrak{n}\, df = \mathfrak{P} = -\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial t} - \bar{\omega}_0\times\mathfrak{J}\,. \tag{11}$$

5. Bestimmung des Momentes der Druckkraft. Für die Berechnung benutzen wir folgende, auf Dyaden bezügliche wichtige Formel[1]

$$\mathfrak{r}\times\nabla\cdot\Psi = \nabla\cdot(\mathfrak{r}\times\Psi) - \Psi_\times\,,$$

wo Ψ die Dyade und $\Psi_\times$ den zugeordneten invarianten Vektor bedeutet, den man erhält, wenn man die dyadische (ohne Zeichen geschriebene) Multiplikation durch die Vektor-Multiplikation ($\times$) ersetzt. Bei symmetrischen Dyaden wird $\Psi_\times = 0$. Damit erhalten wir aus (11) folgende Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{r}\times\nabla\cdot\mathfrak{v}\,\mathfrak{v} &&= \nabla\cdot(\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\,\mathfrak{v})\,,\\
&\mathfrak{r}\times\nabla\cdot\mathfrak{v}_0\mathfrak{v} &&= \nabla\cdot(\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}_0\mathfrak{v}) - \mathfrak{v}_0\times\mathfrak{v}\,,\\
&\mathfrak{r}\times\nabla\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{v} &&= \nabla\cdot(\mathfrak{r}\times\mathfrak{u}\mathfrak{v}) - \mathfrak{u}\times\mathfrak{v}\,,\\
&\mathfrak{r}\times\nabla\cdot p I &&= \mathfrak{r} = \nabla p = \nabla\cdot(\mathfrak{r}\times p I)\ (I\text{ Einheitsdyade})\,.
\end{aligned}\right| \tag{12}$$

Durch Anwendung des Integralsatzes von *Gauß* auf die Dyaden ergeben sich daher die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&\int_T \mathfrak{r}\times\nabla\cdot\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}\; d\tau = \int_F (\mathfrak{r}\times\mathfrak{v})\,\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n}\, df\,,\\
&\int_T \mathfrak{r}\times\nabla\cdot\mathfrak{v}_0\mathfrak{v}\; d\tau = \int_F (\mathfrak{r}\times\mathfrak{v})\,\mathfrak{v}_0\cdot\mathfrak{n}\, df - \mathfrak{v}_0\times\int_T \mathfrak{v}\, d\tau\,,\\
&\int_T \mathfrak{r}\times\nabla\cdot\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\, d\tau = \int_F (\mathfrak{r}\times\mathfrak{v})\,\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{n}\, df - \int_T \mathfrak{u}\times\mathfrak{v}\, d\tau\,.
\end{aligned}\right| \tag{13}$$

Ferner ist nach einer allgemeinen Formel für ein zweifaches Vektorprodukt

$$\mathfrak{r}\times(\bar{\omega}_0\times\mathfrak{v}) + \bar{\omega}_0\times(\mathfrak{v}\times\mathfrak{r}) + \mathfrak{v}\times(\mathfrak{r}\times\bar{\omega}_0) = 0$$

oder

$$\mathfrak{r}\times(\bar{\omega}_0\times\mathfrak{v}) + \mathfrak{u}\times\mathfrak{v} = \bar{\omega}_0\times(\mathfrak{r}\times\mathfrak{v})\,. \tag{14}$$

[1] Vgl. *E. Lohr*, a. a. O., S. 230.

Damit erhalten wir durch Bildung der Momente und Integration bei Benutzung von (1). (8) und (14)

$$-\int_T \mathfrak{r}\times V p\, d\tau = \varrho \frac{\partial}{\partial t}\int_T \mathfrak{r}\times \mathfrak{v}\, d\tau + \varrho\int_F (\mathfrak{r}\times\mathfrak{v})(\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_0-\mathfrak{u})\cdot\mathfrak{n}\, df + \mathfrak{v}_0\times\varrho\int_T \mathfrak{v}\, d\tau + \varrho\int_T \mathfrak{u}\times\mathfrak{v}\, d\tau + \varrho\int_T \mathfrak{r}\times(\omega_0\times\mathfrak{v})\, d\tau ,$$

$$-\mathfrak{M} = -\int_C \mathfrak{r}\times p\,\mathfrak{n}\, df = \varrho\frac{\partial}{\partial t}\int_T \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\, d\tau + \mathfrak{v}_0\times\varrho\int_T \mathfrak{v}\, d\tau + \bar{\omega}_0\times\varrho\int_T \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\, d\tau .$$

Dabei ist bereits das Verschwinden der Flächenintegrale längs H benutzt worden, die sich auf das Grundintegral

$$\int_H \mathfrak{r}\times\mathfrak{n}\, df = 0$$

zurückführen lassen. Setzen wir ferner das Impulsmoment der Flüssigkeitsbewegung

$$\varrho\int_T \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\, d\tau = \varrho\int_C \mathfrak{r}\times V\Phi\, d\tau = \varrho\int_C \mathfrak{r}\times\Phi\,\mathfrak{n}\, df = \mathfrak{R} ,$$

so läßt sich das Ergebnis unserer Rechnung in der Gleichung darstellen

$$\mathfrak{M} = -\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial t} - \mathfrak{v}_0\times\mathfrak{J} - \bar{\omega}_0\times\mathfrak{R} . \tag{16}$$

6. Beziehung zur kinetischen Energie. Wenn man den bekannten Ausdruck für die kinetische Energie benutzt

$$2E = \varrho\int_T (V\Phi)^2\, d\tau = \varrho\int_C \Phi V\Phi\cdot\mathfrak{n}\, df , \tag{17}$$

so ergibt sich leicht bei Benutzung von (1), daß $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{R}$ in folgender Weise aus E durch Differentiation sich ableiten lassen:

$$\frac{\partial E}{\partial\mathfrak{v}_0} = \mathfrak{J} , \quad \frac{\partial E}{\partial\bar{\omega}_0} = \mathfrak{R} . \tag{18}$$

Damit ist eine Beziehung zwischen der Energie und den Druckkräften hergestellt. Der Einfluß der in der Flüssigkeit vorkommenden Wirbelsysteme auf die Impulsvektoren und die Kräfte soll an anderer Stelle behandelt werden.

II. Anwendung auf Rotationskörper.

7. Ausdruck für die Energie. Die Absolutbewegung der Flüssigkeit bei einer Bewegung des Körpers mit der Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ $(v_1\, v_2\, v_3)$ und der Rotationsgeschwindigkeit ω_0 $(\omega_1\,\omega_2\,\omega_3)$ leitet sich von einem Potential Φ her, das die Form

$$\Phi = F_1 v_1 + F_2 v_2 + F_3 v_3 + G_1\omega_1 + G_2\omega_2 + G_3\omega_3 \tag{19}$$

haben möge, wo die F und G Funktionen der Koordinaten sind. Mit Rücksicht auf die Randbedingung

$$V\Phi\cdot\mathfrak{n} = \mathfrak{v}_0\cdot\mathfrak{n} + \bar{\omega}_0\times\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{n} = \mathfrak{v}_0\cdot\mathfrak{n} + \bar{\omega}_0\cdot(\mathfrak{r}\times\mathfrak{n}) \tag{20}$$

läßt sich die kinetische Energie bei Einführung der äußeren Normalen in die Form setzen

$$2E = -\varrho\int\Phi\,[\mathfrak{v}_0\cdot\mathfrak{n} + \bar{\omega}_0\cdot(\mathfrak{r}\times\mathfrak{n})]\, df . \tag{21}$$

Es ergibt sich dann mit (19), daß E eine homogene quadratische Funktion der Geschwindigkeitskomponenten wird von der Form

$$2E = \sum A_{ik} v_i v_k + \sum B_{ik}\omega_i\omega_k + 2\sum D_{ik} v_i\omega_a \qquad (A_{ik} = A_{ki},\ B_{ik} = B_{ki},\ D_{ik} \neq D_{ki}), \tag{22}$$

und zwar wird, wenn wir die Komponenten von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{r} = \mathfrak{n}$ mit den Zeigern 1, 2, 3 bezeichnen

$$\frac{\partial F_r}{\partial n} = n_r , \qquad \frac{\partial G_r}{\partial n} = (\mathfrak{r}\times\mathfrak{n})_r ,$$

und

$$A_{ik} = -\frac{1}{2}\int(F_i n_k + F_k n_i)\, df ;\ B_{ik} = \frac{1}{2}\varrho\int[G_i(\mathfrak{r}\times\mathfrak{n})_k + G_k(\mathfrak{r}\times\mathfrak{n})_i]\, df ;$$
$$D_{ik} = -\frac{1}{2}\varrho\int(F_i(\mathfrak{r}\times\mathfrak{n})_k + G_k n_i)\, df . \tag{23}$$

8. Ausrechnung der Koeffizienten. Wir nehmen die im allgemeinen waagerechte Rotationsachse als x-Achse und einen Punkt auf dieser Achse als Anfangspunkt 0 an. Die rechtwinkligen Koordinaten in der Parallelkreisebene seien y (waagerecht) und z (lotrecht), bzw. η und φ, und den Neigungswinkel der Tangente des Meridianschnitts gegen die Achse wollen wir mit ϑ bezeichnen. Dann sind die Grundvektoren

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{r} &= x\,\mathfrak{e}_1 + y\,\mathfrak{e}_2 + z\,\mathfrak{e}_3 = x\,\mathfrak{e}_1 + \eta\cos\varphi\,\mathfrak{e}_2 + \eta\sin\varphi\,\mathfrak{e}_3\,,\\ \mathfrak{n} &= n_1\,\mathfrak{e}_1 + n_2\,\mathfrak{e}_2 + n_3\,\mathfrak{e}_3 = -\sin\vartheta\,\mathfrak{e}_1 + \cos\vartheta\cos\varphi\,\mathfrak{e}_2 + \cos\vartheta\sin\varphi\,\mathfrak{e}_3\,,\\ \mathfrak{v}_0 &= v_1\,\mathfrak{e}_1 + v_2\,\mathfrak{e}_2 + v_3\,\mathfrak{e}_3 = U(\cos\alpha\,\mathfrak{e}_1 + \cos\beta\,\mathfrak{e}_2 + \cos\gamma\,\mathfrak{e}_3)\,,\\ \omega_0 &= \omega_1\,\mathfrak{e}_1 + \omega_2\,\mathfrak{e}_2 + \omega_3\,\mathfrak{e}_3 = \omega(\cos\alpha'\,\mathfrak{e}_1 + \cos\beta'\,\mathfrak{e}_2 + \cos\gamma'\,\mathfrak{e}_3)\,. \end{aligned}\right| \tag{24}$$

Ferner ist

$$(\mathfrak{r}\times\mathfrak{n})_1 = 0,\ (\mathfrak{r}\times\mathfrak{n})_2 = -\sin\varphi\,(\eta\sin\vartheta + x\cos\vartheta),\ (\mathfrak{r}\times\mathfrak{n})_3 = \cos\varphi\,(\eta\sin\vartheta + x\cos\vartheta),$$

$$df = \frac{\eta}{\cos\vartheta}\,dx\,d\varphi\,.$$

Die achsiale Bewegung, der Funktion F_1 entsprechend, leitet sich aus einer Verteilung von Quellen und Senken längs der Achse des Rotationskörpers ab. F_1 selbst ist von φ unabhängig. Die Querbewegung in der y- bzw. z-Richtung sind von einer Verteilung von Dipolen längs der Achse herleitbar, die nach der y- bzw. z-Richtung orientiert sind; F_2 und F_3 enthalten die Faktoren $\cos\varphi$ bzw. $\sin\varphi$. Wir können also setzen

$$F_2 = \bar{F}\cos\varphi;\qquad F_3 = \bar{F}\sin\varphi\,.$$

Dann ergibt sich aus (24)

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= 2\pi\varrho\int F_1\,\eta\,d\eta,\ A_{22} = A_{33} = -\varrho\int F_2\,\mathfrak{n}_2\,df = -\pi\varrho\int\bar{F}\,\eta\,dx,\ A_{ik} = 0 \text{ für } i\neq k\\ B_{11} &= -\varrho\int G_1\,(\mathfrak{r}\times\mathfrak{n})_1\,df = 0\,. \end{aligned}\right| \tag{25}$$

Die Rotation um die y- bzw. z-Achse wird erzeugt durch Dipolsysteme nach der negativen z-Richtung, bzw. der positiven y-Richtung. Wir können daher setzen

$$G_2 = -G\sin\varphi,\quad G_3 = G\cos\varphi\,.$$

Dann haben wir

$$B_{22} = \pi\varrho\int G(\eta\,d\eta + x\eta\,dx) = B_{33}\,.$$

Die übrigen Größen B_{ik} und D_{ik} werden Null. Es bleibt daher für den Rotationskörper

$$2\,E = A_1\,v_1^2 + A_2(v_2^2 + v_3^2) + B_2(\omega_2^2 + \omega_3^2)\,, \tag{26}$$

wenn wir $A_{11} = A_1$, $A_{22} = A_{33} = A_2$; $B_{22} = B_{33} = B_2$ setzen.

9. Virtuelle Masse und Trägheitskoeffizienten. Die Größe A_1 ist die virtuelle (scheinbare) Masse für die Längsbewegung, A_2 die virtuelle Masse für die Querbewegung und B_2 das virtuelle Trägheitsmoment für die Rotation um eine der quergestellten Achsen. Dividieren wir die virtuelle Masse A_1 und A_2 durch die wirkliche Masse der verdrängten Flüssigkeit, bzw. B_2 durch das entsprechende Trägheitsmoment, so erhalten wir die sogenannten Trägheitskoeffizienten für die Translations- und Rotationsbewegung. Die verdrängte Masse und das entsprechende Trägheitsmoment sind aber

$$m = \varrho\,V = \pi\varrho\int\eta^2\,dx,\ \Theta = \pi\varrho\int\eta^2\left(x_2 + \frac{1}{4}\,\eta^2\right)dx\,. \tag{27}$$

Daraus ergeben sich dann die folgenden Formeln für die drei Trägheitskoeffizienten:

$$k_1 = \frac{A_1}{m} = \frac{\int F_1\,d\eta^2}{\int\eta^2\,dx},\quad k_2 = \frac{A_2}{m} = -\frac{\int\bar{F}\,\eta\,dx}{\int\eta^2\,dx},\quad \varkappa = \frac{B_2}{\Theta} = \frac{\int G\,(\eta^2\,d\eta + x\eta\,dx)}{\int\eta^2\left(x^2 + \frac{1}{4}\,\eta^2\right)dx}\,. \tag{28}$$

Die Integrale (25) bis (28) sind längs der auf der einen Seite der Achse liegenden Meridiangrenze von dem einen Ende des geschlossenen Rotationskörpers bis zum anderen zu erstrecken.

10. Berechnung der Kräfte und Momente. Aus dem Impuls und Impulsmoment

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J} &= A_1\,v_1\,\mathfrak{e}_1 + A_2(v_2\,\mathfrak{e}_2 + v_3\,\mathfrak{e}_3)\,,\\ \mathfrak{R} &= B_2(\omega_2\,\mathfrak{e}_2 + \omega_3\,\mathfrak{e}_3) \end{aligned}\right| \tag{29}$$

erhalten wir im stationären Fall nach (10) und (16) mit Einführung der Trägheitskoeffizienten

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P} &= -\bar{\omega}_0 \times \mathfrak{J} = -k_2 \varrho V(\omega_2 v_3 - \omega_3 v_2)\mathfrak{e}_1 - \varrho V(k_1 \omega_3 v_1 - k_2 \omega_1 v_3)\mathfrak{e}_2 - \varrho V(k_2 \omega_1 v_2 - k_1 \omega_2 v_1)\mathfrak{e}_3, \\ \mathfrak{M} &= -\mathfrak{v}_0 \times \mathfrak{J} - \omega_0 \times \mathfrak{R} = [\varrho V(k_2 - k_1) v_1 v_3 + \Theta \varkappa \omega_1 \omega_3]\,\mathfrak{e}_2 - [\varrho V(k_2 - k_1) v_1 v_2 + \Theta \varkappa \omega_1 \omega_2]\,\mathfrak{e}_3.\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

11. Sonderfälle. a) Bei einer Seitenbewegung in der (x, y)-Ebene unter dem Winkel α gegen die Längsachse entsteht das instabile Moment um die Hochachse

$$\mathfrak{M}_3 = -\frac{1}{2}(k_2 - k_1)\,\varrho\, U^2\, V \sin 2\alpha\,. \quad (31)$$

b) Bei einer Aufwärtsbewegung unter dem Winkel β gegen die Längsachse entsteht das Moment um die y-Achse

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{1}{2}(k_2 - k_1)\,\varrho\, U^2\, V \sin 2\beta\,. \quad (32)$$

c) Bei einer Drehung um die Hochachse mit der Winkelgeschwindigkeit ω_3 und einer Bewegung in der Längsrichtung mit der Geschwindigkeit v_1 entsteht eine Kraft in der y-Richtung von der Größe

$$P_2 = -k_1 \varrho\, V \omega_3 v_1\,. \quad (33)$$

d) Bei einer Längsbewegung in Verbindung mit einer Drehung um die y-Achse entsteht die Kraftwirkung

$$P_3 = k_1 \varrho\, V \omega_2 v_1\,. \quad (34)$$

e) Eine Drehung um die Hauptachse (ω_1) in Verbindung mit einer Drehung um die Hochachse (ω_3) erzeugt ein Moment M_2 um die dritte Achse

$$M_2 = \varkappa\, \Theta\, \omega_1 \omega_3 \text{ (Kreiselwirkung)}\,. \quad (35)$$

12. Bemerkungen zum instationären Fall. Sind $\mathfrak{v}_0$ und ω_0 zeitlich veränderlich, so treten noch Kräfte und Momente hinzu, die mit den Beschleunigungen proportional sind. Eine Beschleunigung in der Längsrichtung hat z. B. eine Trägheitswirkung in der entgegengesetzten Richtung zur Folge

$$P_1' = -\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t} = -A_1 \dot{v}_1 = -k_1 \varrho\, V \dot{v}_1\,. \quad (36)$$

Denkt man sich also die verdrängte Flüssigkeitsmasse mit der Beschleunigung v_1 bewegt und zwar in einem widerstandsfreien Mittel, also im Vakuum, so wird sie einen Trägheitswiderstand $-\varrho V v_1$ haben, der sich von der Kraft P_1' nur durch den Faktor k_1 (< 1) unterscheidet. Der Flüssigkeitswiderstand infolge Beschleunigung, den ein in der Längsrichtung bewegter Rotationskörper erfährt, ist also gleich den mit k_1 multiplizierten Trägheitswiderstand, den die vom Körper verdrängte Flüssigkeitsmasse im Vakuum erfahren würde. Das entsprechende gilt für die Querbewegung, bei der der Koeffizient $k_2 > k_1$ als Faktor auftritt. Ebenso erhalten wir für die Drehbewegung z. B. um die Hochachse

$$M_3' = -\varkappa\, \Theta\, \dot{\omega}_3\,. \quad (37)$$

III. Ergebnisse im Falle des Ellipsoids.

13. Ellipsoid-Koordinaten. Die angegebenen Formeln lassen sich in geschlossener Form nur im Falle des Ellipsoids auswerten. Man verwendet zu diesem Zweck am einfachsten die sogenannten Ellipsoid-Koordinaten[1].

$$x = c\,\zeta\,\mu, \quad \eta = c\sqrt{(1-\mu^2)(\zeta^2-1)} \quad (\zeta > 1,\ -1 < \mu < +1)\,. \quad (39)$$

Die allgemeine Lösung der Potentialgleichung $\Delta \Phi = 0$ hat dann die Form

$$\Phi = -\sum \alpha_\nu P_\nu(\mu)\, Q_\nu(\zeta)\,, \quad (39)$$

wo P_ν und Q_ν die Kugelfunktionen ν-ter Ordnung erster und zweiter Art bezeichnen. Beim Ellipsoid haben wir nun

a) für die Axialbewegung

$$F_1 = -\alpha_1 P_1(\mu)\, Q_1(\zeta)\,. \quad (40)$$

[1] Vgl. *H. Lamb*, Lehrbuch der Hydrodynamik. Leipzig und Berlin 1931, S. 151. Über die Verwendung dieser Koordinaten im allgemeinen Fall soll später berichtet werden.

Es ist zweckmäßig, für die weitere Rechnung, die hier nur in den Ergebnissen gebracht werden kann, neue Funktionen $\bar{P}_1$ und $\bar{Q}_1$ einzuführen, die mit P_1 und Q_1 sehr einfach zusammenhängen[1]. Mit Rücksicht auf die Randbedingungen findet man dann

$$\alpha_1 = \frac{\zeta_0^2 - 1}{\bar{Q}_1(\zeta_0)}, \tag{41}$$

wobei $\zeta = \zeta_0$ den Wert der Koordinate ζ an der Oberfläche bezeichnet. Weiter ist mit $c = 1$

$$2\int F_1 \eta \, d\eta = \frac{4}{3}\alpha_1(\zeta_0^2 - 1)\, Q_1(\zeta_0), \quad \int \eta^2 \, dx = \frac{4}{3}\zeta_0(\zeta_0^2 - 1), \tag{42}$$

wobei die Integration bei konstantem $\zeta = \zeta_0$ nach μ zwischen den Grenzen -1 und $+1$ durchzuführen ist. Man erhält dann

$$k_1 = \frac{\alpha_1 Q_1(\zeta_0)}{\zeta_0} = \frac{\dfrac{1}{\zeta_0} - \bar{Q}_1(\zeta_0)}{\bar{Q}(\zeta_0)}. \tag{43}$$

b) Für die Seitenbewegung führt die Lösung auf die sogenannten tesseralen Kugelfunktionen mit $\cos\varphi$ als Faktor

$$\Phi = \cos\varphi \sum \beta_\nu P_\nu^1(\mu)\, Q_\nu^1(\zeta). \tag{44}$$

Im Falle des Ellipsoids haben wir mit Einführung der überstrichenen Funktionen

$$F_2 = -\beta \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\zeta^2 - 1}}\, \bar{Q}_1 \cos\varphi, \quad \bar{F} = -\beta_1 \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\zeta^2 - 1}}\, \bar{Q}_1. \tag{45}$$

Man erhält dann

$$\beta_1 = \frac{\zeta_0^2 - 1}{\dfrac{2}{\zeta_0} - \bar{Q}_1(\zeta_0)}. \tag{46}$$

Ferner wird

$$-\int \bar{F}\, \eta \, dx = \frac{4}{3}\zeta_0 \beta_1 \bar{Q}_1(\zeta_0),$$

$$k_2 = \frac{\bar{Q}_1(\zeta_0)}{\dfrac{2}{\zeta_0} - \bar{Q}_1(\zeta_0)}, \quad k_2 - k_1 = \frac{\bar{Q}_2(\zeta_0)}{\zeta_0 \bar{Q}_1(\zeta_0)[2 - \zeta_0 Q_1(\zeta_0)]}. \tag{47}$$

c) Für die Drehung um die y-Achse wird

$$\left.\begin{aligned} G &= \frac{1}{3}\frac{\zeta^2 - 1}{3\zeta\bar{Q}_2 - 3\bar{Q}_3}\frac{1}{\eta}\bar{P}_2(\mu)\bar{Q}_2(\zeta) = \frac{\mu(1-\mu^2)(\zeta^2-1)}{3\zeta\bar{Q}_2 - 2\bar{Q}_3}\frac{1}{\eta}\bar{Q}_2, \\ B_2 &= \frac{4}{15}\pi\varrho\,\bar{Q}_2(\zeta_0)\frac{\zeta_0^2 - 1}{3\zeta_0\bar{Q}_2(\zeta_0) - 2\bar{Q}_3(\zeta_0)}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Aus dem Trägheitsmoment

$$\Theta = \frac{4}{15}\pi\varrho\, ab^2(a^2 + b^2) = \frac{4}{15}\pi\varrho\,\zeta_0(\zeta_0^2 - 1)(2\zeta_0^2 - 1) \tag{49}$$

ergibt sich dann der Trägheitskoeffizient für die Drehung

$$\varkappa = \frac{B_2}{\Theta} = \frac{\bar{Q}_2(\zeta_0)}{(2\zeta_0^2 - 1)[2 - (2\zeta_0^2 - 1)\bar{Q}_2(\zeta_0)]}. \tag{50}$$

Damit sind alle Größen bestimmt, die zur Ermittlung der Kräfte und Momente benötigt werden.

Die weitere Anwendung auf allgemeine Rotationskörper, insbesondere die Behandlung der Aufgabe, zu einer vorgegebenen Form des Körpers den Druckverlauf und die Kräfte zu bestimmen, soll an anderer Stelle ausführlich behandelt werden.

(Eingegangen am 23. Februar 1950.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *W. Müller*, München 22, Museumstr. 1 pt.

[1] $\dfrac{d\bar{P}_n}{d\mu}\sqrt{1-\mu^2} = P_n^1 = \dfrac{\bar{P}_n}{\sqrt{1-\mu^2}}$; $\dfrac{dQ_n}{d\zeta}\sqrt{\zeta^2-1} = Q_n^1 = -\dfrac{\bar{Q}_n}{\sqrt{\zeta^2-1}}$

Systematische Sechskomponentenmessungen an Pfeilflügeln*).

I. Mitteilung.

Von W. Jacobs.

1. Einleitung. Gepfeilte Tragflügel sind schon in der Frühzeit der Flugtechnik bei schwanzlosen Flugzeugen verwendet worden, da bei solchen das Momentengleichgewicht um die Querachse nur durch Pfeilstellung erfüllt werden kann[1, 2]. Das Interesse an Pfeilflügeln kam in ein völlig neues Stadium, als *A. Busemann*[3] im Jahre 1935 darauf hingewiesen hatte, daß bei hohen Fluggeschwindigkeiten durch Pfeilung sehr beträchtlich am Widerstand gespart werden kann. Im Bereich hoher Machscher Zahlen bei Unterschallströmungen beruht dies darauf, daß die mit dem ersten Auftreten des Verdichtungsstoßes auftretenden Widerstandserhöhungen durch Pfeilung nach größeren Machschen Zahlen verschoben werden können. Im Überschallbereich kann der Widerstand durch Pfeilung beträchtlich vermindert werden, wenn der Pfeilwinkel so groß gewählt wird, daß die Vorderkante des Flügels innerhalb des Machschen Kegels liegt, so daß die Komponente der Anströmungsgeschwindigkeit senkrecht zur Vorderkante kleiner ist als die Schallgeschwindigkeit, und dadurch der Wellenwiderstand im wesentlichen in Fortfall kommt. Die praktischen Anwendungen des Pfeilflügels liegen demnach heute ausschließlich im Bereich der kompressiblen Strömung (Unter- und Überschallgeschwindigkeit). Im Bereich der Strömungsmaschinen haben gepfeilte Flügel bisher eine Anwendung bei Propellern gefunden, und dort bei hohen Drehzahlen eine beträchtliche Verbesserung des Wirkungsgrades gebracht.

Für die aerodynamischen Eigenschaften gepfeilter Tragflügel im Bereich der inkompressiblen Strömung besteht einmal ein erhebliches grundsätzliches Interesse, aber darüber hinaus auch ein konkretes praktisches Interesse, da ja jedes Flugzeug bei Start und Landung diesen Bereich durchmessen muß.

In Deutschland wurden bald nach 1935 die systematischen Untersuchungen von Pfeilflügeln im Bereich der inkompressiblen Strömung sowohl theoretisch[4, 5] als auch experimentell in Angriff genommen und bis Kriegsende erheblich gefördert. Im Ausland ist erstaunlicherweise während des Krieges das Pfeilflügelproblem anscheinend kaum bearbeitet worden. Außer den Arbeiten von *Falkner*[6] und *Mutterperl*[7] über die theoretische Ermittlung der Auftriebsverteilung am Pfeilflügel ist hier nur wenig zu nennen. Man hat daher den Eindruck, daß die Busemannsche Erkenntnis von 1935 dort ganz in Vergessenheit geraten war. Als nach Kriegsende die deutschen Forschungsergebnisse über Pfeilflügel im Ausland bekannt wurden, wurde auch dort das Pfeilflügelproblem nun sehr intensiv bearbeitet. Vor allem die Theorie des Pfeilflügels bei Überschallgeschwindigkeit ist im Anschluß an die Arbeiten von *L. Prandtl*[8] und *H. Schlichting*[9] durch

---

* Die vorliegenden Messungen wurden zwischen 1941 und 1945 im früheren Aerodynamischen Institut der Techn. Hochschule Braunschweig ausgeführt. (Leitung: Prof. Dr. *H. Schlichting*.) Sie wurden während des Krieges in mehreren FB- und UM-Berichten der ZWB (Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen) mitgeteilt, die heute nicht mehr zugänglich sind. Hier wird abschließend (in zwei Mitteilungen) ein zusammenfassender Bericht gegeben.

[1] Ergebnisse der Aerodynam. Versuchsanstalt Göttingen. II. Lieferung (1923), S. 53.

[2] *H. Blenk*, Göttinger Seckskomponenten-Messungen an Flügeln mit V-Form, Pfeilform und Verwindung. D. V. L. Jahrbuch 1929, S. 183.

[3] *A. Busemann*. Aerodynamischer Auftrieb bei Überschallgeschwindigkeit. Volta-Congreß Rom 1935, S. 328.

[4] *H. Multhopp*. Die Anwendung der Tragflügeltheorie auf Fragen der Flugmechanik bei unsymmetrischer Anströmung. Bericht der Lilienthalgesellschaft für Luftfahrtforschung 1939, S. 2.

[5] *J. Weissinger*, Forschungsbericht der Zentr. für wiss. Berichtswesen. Berlin-Adlershof. F. B.1553 (1942). Enthalten in *J. Weissinger*, Math. Nachr. 2 (1949), S. 45.

[6] *V. M. Falkner*, ARC Rep. a. Memoranda 1910 (1943).

[7] *W. Mutterperl*, NACA Techn. Note 834 (1941).

[8] *L. Prandtl*, Luftfahrt-Forsch. Bd. 13 (1936), S. 313.

[9] *H. Schlichting*, Luftfahrt-Forsch. Bd. 13 (1936), S. 320.

neuere englische und amerikanische Arbeiten heute zu großer Vollkommenheit entwickelt worden[1, 2, 3]. Dagegen harrt die Theorie des Pfeilflügels bei Unterschallgeschwindigkeit, insbesondere die der inkompressiblen Strömung, auch heute noch einer befriedigenden Lösung.

Das Material an systematischen experimentellen Untersuchungen über Pfeilflügel, das als Grundlage für theoretische Untersuchungen nicht entbehrt werden kann, ist aber auch heute noch sehr spärlich. Aus diesem Grunde erscheint es angebracht, über die deutschen Untersuchungen zu dieser Frage, die jetzt schon über fünf Jahre zurückliegen, hier zusammenfassend zu berichten.

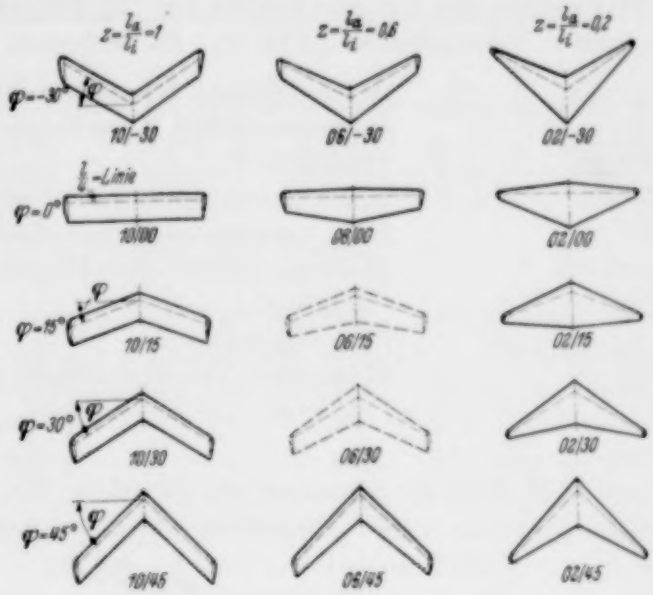


Abb. 1. Übersicht der Pfeilflügelsystematik.

Die wesentlichsten geometrischen Parameter des Pfeilflügels sind, wenn man sich auf die einfache Form eines Trapezflügels beschränkt (Abb. 1:)

1. der Pfeilwinkel φ,
2. das Seitenverhältnis $b^2/F = \Lambda$,
3. die Zuspitzung (Trapezflügel) $Z = l_a/l_i$.

Da die durch das Seitenverhältnis Λ bedingten Änderungen der aerodynamischen Beiwerte des Pfeilflügels nicht wesentlich verschieden sind von denen des ungepfeilten Flügels, und da diese aber gut bekannt sind, konnte das Versuchsprogramm auf die beiden Parameter Pfeilwinkel und Zuspitzung beschränkt werden. Diese wurden geändert in den Grenzen $\varphi = -30°$, $0°$, $+15°$, $30°$, $45°$ und $Z = 1{,}0$; $0{,}6$; $0{,}2$. Das Seitenverhältnis wurde mit $\Lambda = 5$ konstant gehalten (Abb. 2).

Die im folgenden beschriebenen Messungen wurden bei verhältnismäßig kleinen Reynolds-Zahlen ausgeführt, $Re = vl/\nu = 4 \cdot 10^5$. Wenn auch die Übertragung auf die Großausführung deshalb nicht ohne weiteres gesichert ist, so liefert aber der Vergleich der gemessenen Pfeilflügel untereinander wertvolle Aufschlüsse, die auch bei größeren Reynolds-Zahlen in guter Näherung zutreffen dürften.

Der vorliegende erste Teilbericht umfaßt die Ergebnisse der Kraftmessungen (Drei- und Sechskomponentenmessungen)[4, 5, 6]. Dabei stehen im Vordergrund der Betrachtungen die Stabilitätsbeiwerte, d. h. der Momentenanstieg um Quer-, Längs- und Hochachse. Der zweite Teilbericht wird über Druckverteilungsmessungen an den gleichen Flügeln berichten.

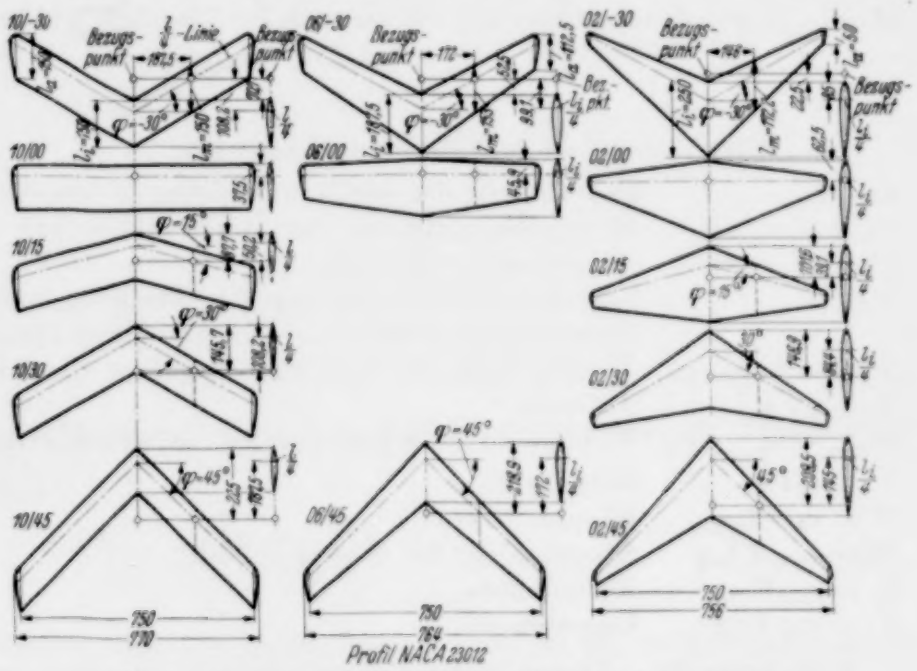


Abb. 2. Abmessungen der Modelle und Lage der Bezugspunkte.

[1] *Th. von Kármán*, J. aeronaut. Sci. Bd. 14 (1947), S. 373.
[2] *A. E. Puckett*, J. aeronaut. Sci. Bd. 13 (1946), S. 475.
[3] *H. J. Stewart*, Quart. Applied Math. 4 (1946), S. 246.
[4] *W. Jacobs*, Forschungsbericht der Zentr. für wiss. Berichtswesen. Berlin-Adlershof. F. B. 1629 (1942). Bibliography of Technical Reports, Washington, P. B. 36 166.
[5] *W. Jacobs*, Untersuchungen und Mitteilungen der D. V. L. Berlin-Adlershof, U. M. 2069 (1944). Bibliography of Technical Reports, Washington, P. B. 39 161.
[6] *W. Jacobs*, Untersuchungen und Mitteilungen der D. V. L. Berlin-Adlershof, U. M. 2103 (1944). Bibliography of Technical Reports, Washington, P. B. 70 712.

2. Bezeichnungen und Bezugsgrößen. Die Bezeichnungen entsprechen dem in Deutschland aufgestellten Normblatt DIN L 100 (vgl. Abb. 3). Die Kräfte und Momente sind jedoch bezogen auf das experimentelle Achsensystem. Für die Stabilitätsbeiwerte des Schiebe-Rollmomentes und Schiebe-Giermomentes sind auch noch die flugzeugfesten Werte berechnet worden. Der Koordinatenursprung liegt stets auf der Sehne des Profilmittelschnittes und hat die Rücklage des $l/4$-Punktes des Flügelschnittes im Flächenschwerpunkt einer Flügelhälfte ($= l_m/4$) = geometrischer Neutralpunkt (Abb. 2). Es bedeuten

x, y, z	flugzeugfestes Koordinatensystem,
x_e, y_e, z_e	experimentelles Koordinatensystem,
F	Flügelfläche,
b'	Flügelspannweite, mit Endkappen,
b	Flügelspannweite ohne Endkappen,
$s = b/2$	Halbspannweite des Flügels,
$l(y)$	Flügeltiefe,
Λ	Flügelstreckung,
l_a	Flügeltiefe am Flügelende ohne Endkappen,
l_i	Flügeltiefe in Flügelmitte,

$l_m = \frac{2}{F}\int_0^{b/2} l^2(y)\,dy$ „geometrische mittlere Flügeltiefe",
für Trapezflügel: = Flügeltiefe im Flächenschwerpunkt einer Flügelhälfte,

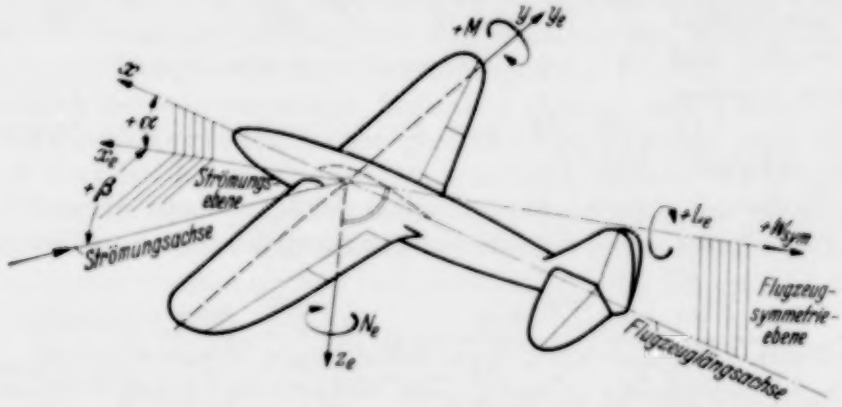


Abb. 3. Achsensystem für Sechskomponentenmessungen.

$Z = l_a/l_i$	Zuspitzung des Flügels,
α	Anstellwinkel, gemessen von Flügelsehne,
φ	Pfeilwinkel der $l/4$-Linie des Flügels, positiv bei Pfeilung nach rückwärts,
β	Schiebewinkel, positiv bei Rücklage des Steuerbordflügels,
x_s, y_s, z_s	Koordinaten des geometrischen Neutralpunktes (= Flächenschwerpunkt einer Flügelhälfte),
x_N, y_N	Koordinaten des aerodynamischen Neutralpunktes (Abb. 8),
$x'_N = x_s - x_N$ | $y'_N = y_s - y_N$	Abstandskoordinaten des aerodynamischen Neutralpunktes vom Flächenschwerpunkt (Abb. 8),
Δx_N	Neutralpunktverschiebung des Pfeilflügels infolge Änderung der Auftriebsverteilung gegenüber dem ungepfeilten Flügel (Abb. 8),
$\Delta y_N = y_N - y_{Ng}$	Verschiebung des Lastschwerpunktes einer Flügelhälfte durch Pfeilung,
$A = c_a Fq$	Auftrieb,
$W_{sym} = c_{w_{sym}} Fq$	Widerstand = Kraft parallel zu Symmetrieebene (s. Abb. 3),
$Y = c_y Fq$	Seitenkraft,
$M = c_M Fl_m q$	Kippmoment,
$M_0 = c_{M0} Fl_m q$	Kippmoment bei Auftrieb Null,
$L_e = c_{Le} Fsq$	Rollmoment,
$N_e = c_{Ne} Fsq$	Giermoment.

3. Modelle. Eine Übersicht der gesamten Flügelsystematik mit den Abmessungen der Modelle zeigen Abb. 1 und 2. Die Flügel haben trapezförmigen Umriß; sie sind mit Abrundungen am Flügelende versehen, die so ausgebildet sind, daß längs der Tiefe der örtliche Abrundungsradius gleich der halben örtlichen Profildicke ist. Ohne Endkappen haben sämtliche Flügel gleiche Spannweite und gleiches Seitenverhältnis. Als Zuspitzung wurden gewählt: $Z = l_a/l_i = 1{,}0$; 0,6; 0,2. Die Pfeilwinkel betragen $\varphi = -30°$, $0°$, $+15°$, $30°$, $45°$. Nur aus der Gruppe mit der Zuspitzung $Z = 0{,}6$ wurden die Flügel 06/15 und 06/30[1] herausgelassen, da sich deren

[1] Erläuterungen der Profilbezeichnung: Die ersten beiden Ziffern geben die Zuspitzung in Zehnerprozenten und die beiden letzten die Pfeilstellung an. Z. B. bedeutet 06/30 : $Z = 0{,}6$; $\varphi = 30°$.

Ergebnisse recht gut aus den übrigen Werten interpolieren lassen. Sämtliche Flügel haben das Profil NACA 23012. Sie sind ohne V-Stellung und ohne Verwindung, d. h. die Profilsehnen sämtlicher Flügelschnitte liegen in einer Ebene. Mit den Endkappen ergeben sich für die Flügel mit den verschiedenen Zuspitzungen folgende genauen Abmessungen:
Spannweite ohne Endkappen: $b = 0{,}750\ m$ für alle Zuspitzungen Z.

Zuspitzung $Z = l_a/l_i$	b' [m]	F [m²]	l_m [m]	l_i [m]	l_a [m]	Λ	$b/2 / l_m$	$b'/2 / l_m$
1,0	0,770	0,1146	0,150	0,150	0,150	5,18	2,50	2,57
0,6	0,764	0,1135	0,153	0,188	0,113	5,16	2,45	2,50
0,2	0,756	0,1128	0,172	0,250	0,050	5,06	2,18	2,20

Spannweite ohne Endkappen $b = 0{,}750$ m für alle Zuspitzungen Z.

4. Ergebnisse der Messungen. Die Messungen wurden im Windkanal des Aerodynamischen Institutes der Technischen Hochschule zu Braunschweig durchgeführt bei einem Strahldurchmesser von 1,2 m. Die Windgeschwindigkeit betrug 40 m/sec. Dies entspricht, bezogen auf die mittlere Flügeltiefe $l = (l_a + l_i)/2$ einer Reynoldsschen Zahl $Re = vl/\nu = 4{,}2 \cdot 10^5$. Es wurden sowohl Dreikomponenten- als auch Sechskomponentenmessungen ausgeführt. Die Dreikomponentenmessungen erfolgten bei $\beta = 0$ über den ganzen Anstellwinkelbereich bis zum Abreißen der Strömung. Bei den Sechskomponentenmessungen wurde jeweils bei einem festen Anstellwinkel über den Schiebewinkelbereich von $\beta = -20°$ bis $+20°$, in einigen Fällen von $\beta = -30°$ bis $+30°$, gemessen. Als Anstellwinkel wurden hierbei gewählt $\alpha = -4°$, $+2°$, $6°$, $9°$, $12°$ und $15°$.

Die Ergebnisse der Dreikomponentenmessungen enthalten Abb. 4a, b, c und 5a, b, c. Hierbei sind die Momente bezogen auf die Querachse durch den l_m/4-Punkt (= geometrischer Neutralpunkt). Die Benutzung der geometrischen Flügeltiefe l_m als Bezugsgröße bietet gewisse Vorteile und hat sich daher in Deutschland allgemein eingebürgert[1]. Die Lage dieses geometrischen Neutralpunktes (= Flächenschwerpunkt einer Flügelhälfte) läßt sich formelmäßig angeben. Wenn $x(y)$ den Abstand der l/4-Linie von der Querachse durch den l_i/4-Punkt bedeutet, so gilt

$$x_s = \frac{2}{F}\int_0^{b/2} x(y)\, l(y)\, dy, \qquad y_s = \frac{2}{F}\int_0^{b/2} y\, l(y)\, dy, \qquad z_s = \frac{2}{F}\int_0^{b/2} z(y)\, l(y)\, dy.$$

Die Auswertung für Tragflügel ergibt

$$x_s = y_s \operatorname{tg}\varphi, \qquad \frac{y_s}{b/2} = \frac{1}{3}\,\frac{1+2Z}{1+Z}.$$

Auch für die geometrische mittlere Flügeltiefe $l_m = \frac{2}{F}\int_0^{b/2} l^2(y)\, dy$ ergibt sich für Trapezflügel eine geschlossene Formel, nämlich

$$\frac{l_m}{l_i} = \frac{2}{3}\,\frac{1+Z+Z^2}{1+Z}.$$

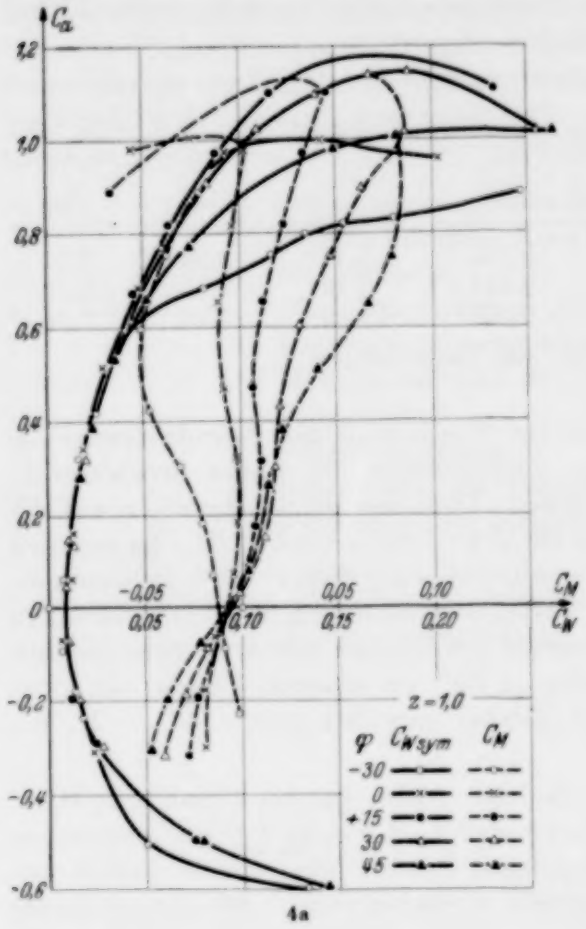
Auf eine Wiedergabe der sehr umfangreichen vollständigen Ergebnisse der Sechskomponentenmessungen muß hier verzichtet werden.

Aus den Ergebnissen läßt sich folgendes entnehmen:

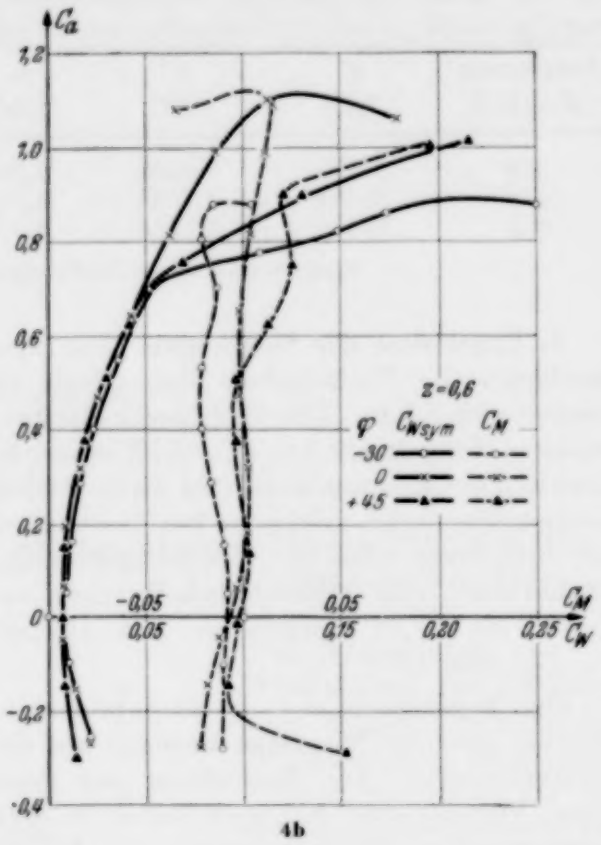
a) Symmetrische Anströmung. Auftriebsanstieg: Der Auftriebsanstieg $\partial c_a/\partial\alpha$ in Abhängigkeit vom Pfeilwinkel φ zeigt für die Flügel konstanter Zuspitzung ein Maximum in

[1] Nur bei Wahl dieser Bezugstiefe ergibt sich nämlich bei einem Flügel mit konstanter $c_{Mo\,örtl}$-Verteilung längs Spannweite für den Momentenbeiwert des ganzen Flügels $c_{Mo\,ges}$ der gleiche Zahlenwert wie für $c_{Mo\,örtl}$.

dem Bereich von $\varphi = 0$ bis $+15°$. Mit stärker werdender positiver und negativer Pfeilung tritt ein Abfall ein. Von der Zuspitzung ist keine starke Abhängigkeit festzustellen (Tabelle 1).



4a



4b

Auftriebsmaximum: Da das Auftriebsmaximum stark kennzahlabhängig ist, wurde auf die Ermittlung von $c_{a\,max}$ kein besonderer Wert gelegt; wir wollen daher nicht näher darauf eingehen.

Widerstand: Die Widerstandsbeiwerte unterscheiden sich im unteren c_a-Bereich nicht merklich voneinander (Abb. 4). Mit wachsendem Anstellwinkel zeigt sich jedoch infolge Abreißerscheinungen ein stark unterschiedliches Verhalten. Aus der Reihe der Flügel mit der Zuspitzung $Z = 1$ (Abb. 4) erkennt man, daß ein Abknicken der Polare in Richtung größerer c_w-Werte zuerst bei dem vorwärts gepfeilten Flügel (10/—30) auftritt, dann bei dem mit größter positiver Pfeilung (10/45) und schließlich bei dem geraden Flügel (10/00). Die Flügel 10/15 und 10/30 zeigen ganz normales Verhalten. Dies findet seine Erklärung in dem Auftreten des „Pfeileffektes" und eines „Grenzschichteffektes". Der Pfeileffekt bewirkt bei vorwärts gepfeilten Flügeln eine Erhöhung des $c_{a\,örtl}$-Wertes im mittleren Flügelteil. Schon bei dem geraden Flügel mit der Zuspitzung $Z = 1$ ist eine Auftriebsverteilung mit größtem $c_{a\,örtl}$-Wert in Flügelmitte vorhanden. Da dieser Wert durch die Vorwärtspfeilung noch verstärkt wird, treten in diesem Gebiet recht früh Abreißerscheinungen auf. Als weiterer Einfluß auf das Abreißen der Strömung kommt bei gepfeilten Flügeln ein Grenzschichteffekt hinzu. Es entsteht nämlich am Flügel infolge der Pfeilstellung ein Druckgradient in Querrichtung, dem

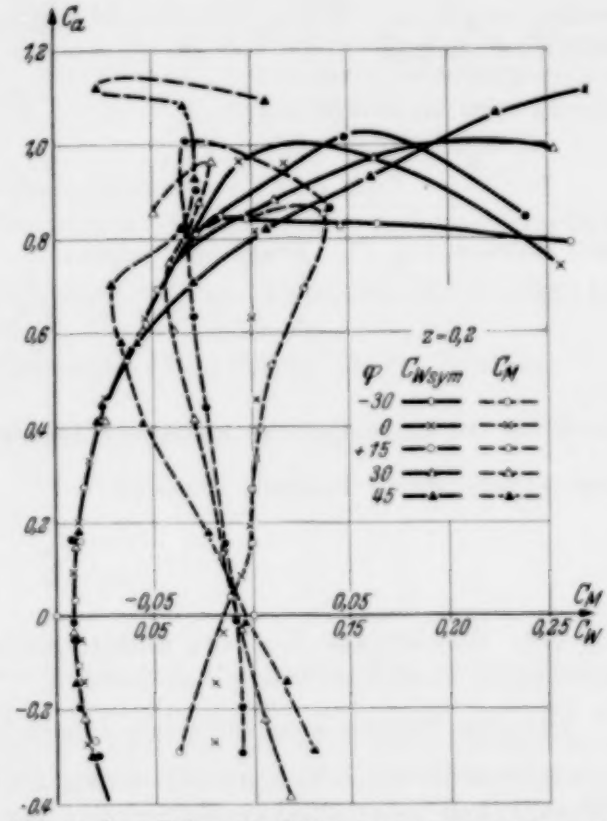
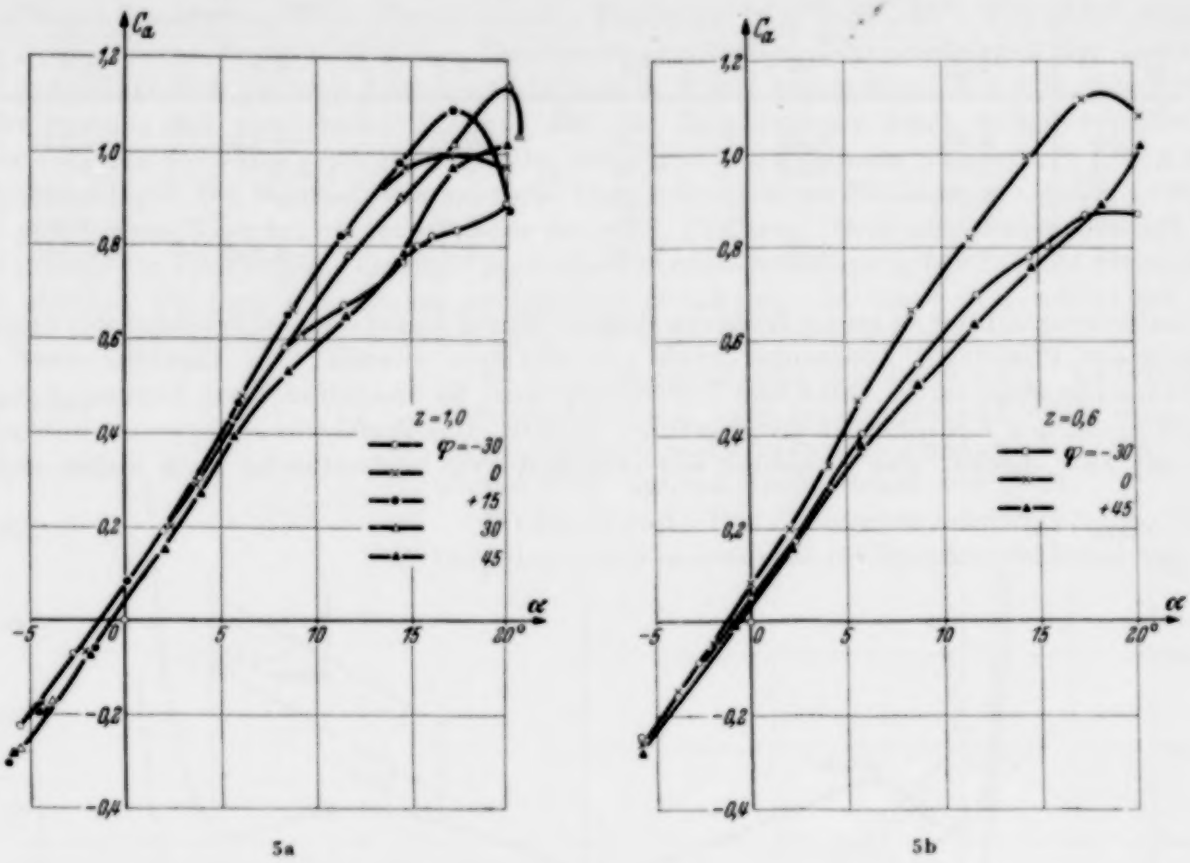


Abb. 4a, b, c. Polaren und Momentenkurven für $\beta = 0$.

vor allem das Grenzschichtmaterial wegen seiner geringen Trägheitskräfte folgt. Beim vorwärts gepfeilten Flügel tritt auf der Saugseite eine Druckabnahme nach innen auf, so daß durch



5a 5b

das Abwandern des Grenzschichtmaterials in dieser Richtung eine Anhäufung im inneren Flügelteil festzustellen ist. Dies bewirkt erhöhte Abreißgefahr in diesem Gebiet. Das Gegenteil ist beim rückwärts gepfeilten Flügel zu beobachten. In diesem Fall bewirkt der Pfeileffekt eine Erhöhung des Auftriebs im äußeren Flügelteil und der Grenzschichteffekt ein Abwandern des Grenzschichtmaterials nach außen, so daß erhöhte Abreißgefahr im äußeren Flügelteil besteht. Sowohl beim vorwärts gepfeilten als auch beim rückwärts gepfeilten Flügel wirken die Einflüsse, herrührend vom „Pfeileffekt" und vom „Grenzschichteffekt" im gleichen Sinne. Der Beginn des ersten Abreißens im äußeren Flügelteil wird jedoch am Flügel mit $Z = 1$ erst bei größeren Pfeilungen zu beobachten sein, da der Pfeileffekt schon beträchtlich sein muß, um an dem Flügel $Z = 1$ eine Zunahme des $c_{a\,örtl}$-Wertes nach außen zu erzeugen. Bei geringeren Pfeilungen sind ja auch keine örtlich begrenzten Abreißerscheinungen vor dem Erreichen des gesamten maximalen Auftriebes festzustellen (Abb. 4).

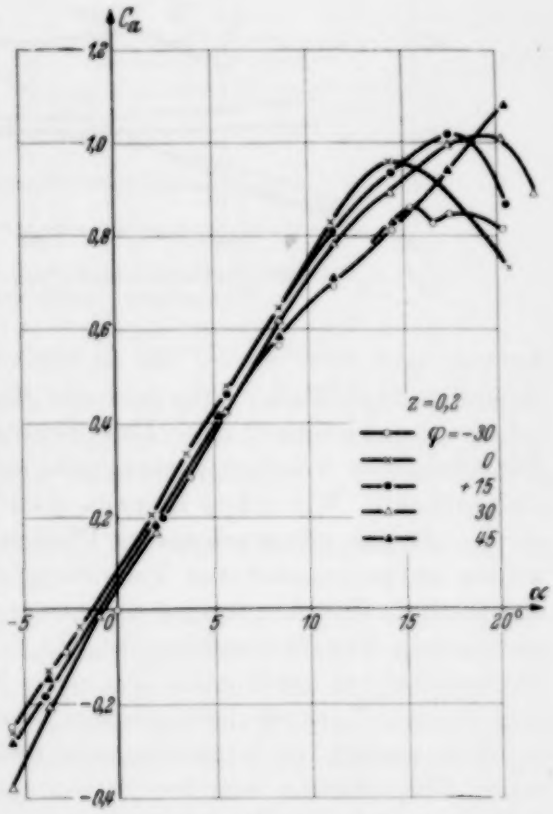


Abb. 5a, b, c. Auftriebsbeiwert in Abhängigkeit vom Anstellwinkel für $\beta = 0$.

Anders liegen die Verhältnisse dagegen bei Flügeln größerer Zuspitzung ($Z = 0{,}2$), bei denen schon der gerade Flügel eine nach außen zunehmende $c_{a\,örtl}$-Verteilung besitzt. In diesem Fall tritt das Abreißen zuerst an den rückwärts gepfeilten Flügeln auf. Dies ist auf Abb. 4c zu sehen, wo die Polare zuerst für den Flügel 02/45 abknickt. Bei den Flügeln mit der Zuspitzung $Z = 0{,}6$ knickt die Polare vom Flügel 06/—30 noch etwas eher ab als beim Flügel 06/45 (Abb. 4b). Die Tatsache, daß beim rückwärts gepfeilten Flügel der Grenzschichteffekt eine Anhäufung des Grenzschichtmaterials und damit eine Erhöhung des örtlichen Profilwiderstandes im äußeren

Tabelle 1. *Auftriebsanstieg* $\partial c_a/\partial \alpha$ *und Momentenanstieg* $\partial c_M/\partial c_a$ *(bezogen auf* $l_m/4$*) bei* $\beta = 0$.

	Werte: $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$			$\frac{\partial c_M}{\partial c_a} = \frac{x'_N}{l_m}$		
φ^0 \ Z	1,0	0,6	0,2	1,0	0,6	0,2
—30	3,38	3,38	3,38	—0,071	—0,026	+0,048
0	3,89	3,73	3,70	0	0	0
15	3,85	—	3,82	0,020	—	—0,026
30	3,62	—	3,75	0,031	—	—0,060
45	3,33	3,19	3,50	0,040	—0,002	—0,118

Flügelteil hervorruft, ist in einem früheren Bericht[1] durch Impulsmessungen längs der Spannweite verschiedener Pfeilflügel konstanter Tiefe gut bestätigt worden. Das Ergebnis einer solchen Widerstandsmessung ist in Abb. 6 und 7 wiedergegeben. Es handelt sich um Untersuchungen, die an Pfeilflügeln mit Endscheiben durchgeführt wurden. Das Profil war ein symmetrisches NACA-Profil mit 12% Dicke. Die Zunahme des örtlichen Profilwiderstandes nach außen tritt stark

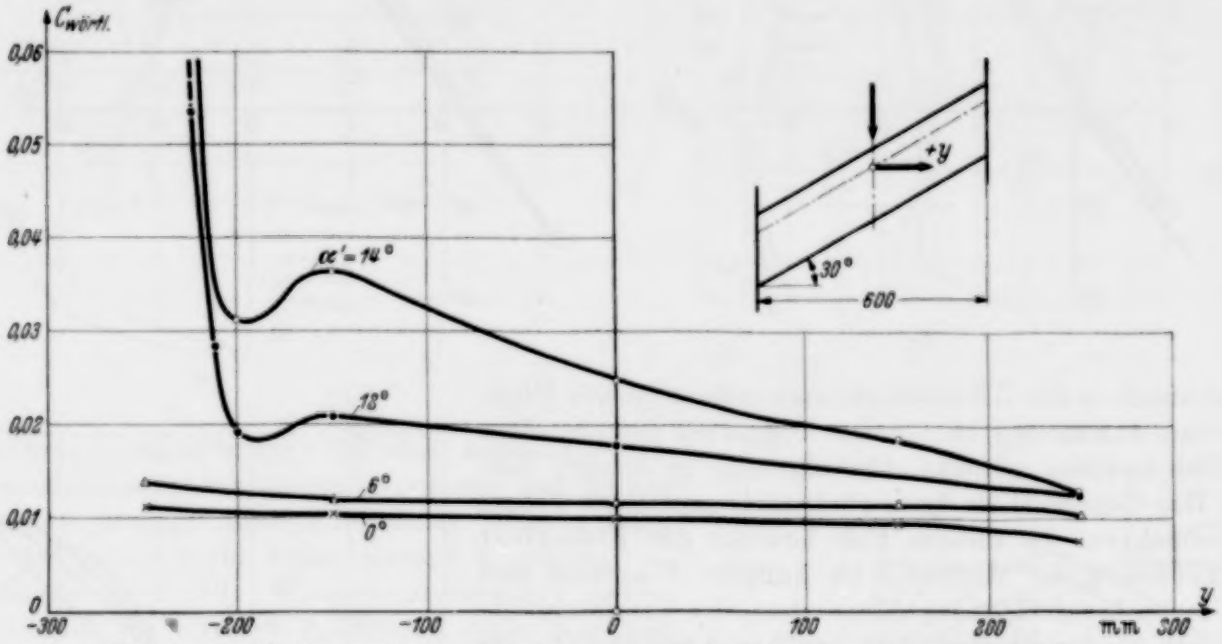


Abb. 6. Örtlicher Profilwiderstand längs Spannweite für einen Pfeilflügel ($\varphi = 30°$) mit Endscheiben bei verschiedenen Anstellwinkeln; $\varphi = 30°$; $\alpha_g = 0, 6, 12, 14$; Profil NACA 0012.

hervor, und zwar ist sie um so stärker je größer der Pfeilwinkel und Anstellwinkel sind. Beim Anstellwinkel Null ergibt sich ein längs der Spannweite konstanter örtlicher Profilwiderstand.

Neutralpunktlage: Das Kippmoment, bezogen auf die Achse durch den $l_m/4$-Punkt der Flügeltiefe im Flächenschwerpunkt einer Flügelhälfte, ist in Abb. 4a, b, c in Abhängigkeit von c_a aufgetragen. Wir sehen hieraus, daß für die Flügel mit der Zuspitzung $Z = 1{,}0$ das Moment von $\varphi = -30°$ ab mit wachsender Pfeilung größer, d. h. mehr schwanzlastig wird. Die Flügel $Z = 0{,}2$ zeigen entgegengesetztes Verhalten, das Moment fällt mit der Pfeilung ab, d. h. es wird mehr kopflastig. Für $Z = 0{,}6$ ist die Änderung mit dem Pfeilwinkel nur gering. Die Lage des aerodynamischen Neutralpunktes $dc_M/dc_a = x'_N/l_m$ ist in Tabelle 1 enthalten. Die Abhängigkeit vom Pfeilwinkel ist auch noch in einem Schaubild dargestellt worden, so daß auch Zwischenwerte von φ und Z interpoliert werden können (Abb. 9).

Wir wollen im folgenden aus den Neutralpunktlagen die Abstände der Lastschwerpunkte einer Flügelhälfte von der Symmetrieebene bestimmen. Die Ermittlung der Lage des Lastenschwerpunktes geschieht nach der weiter unten abgeleiteten Gleichung (6). Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 enthalten. Von besonderem Interesse ist auch die Änderung der Lage des Lastschwerpunktes infolge der Pfeilstellung, und dabei insbesondere seine Verschiebung in Spannweitenrichtung gegenüber dem geraden Flügel. Diese Verschiebung des Lastschwerpunktes kann

[1] *W. Jacobs*, Forschungsbericht der Zentr. für wiss. Berichtswesen, Berlin-Adlershof, F. B. 1629 (1942). Bibliography of Technical Reports, Washington, P. B. 36 166.

aber aus Kraftmessungen nicht ermittelt werden, sondern nur aus Druckverteilungsmessungen da sich der Lastschwerpunkt des ungepfeilten Flügels nur aus Druckverteilungsmessungen ermitteln läßt. Im Rahmen unserer Pfeilflügelsystematik sind Druckverteilungsmessungen bisher an den Flügeln konstanter Tiefe ($Z=1$) mit den Pfeilwinkeln $\varphi = 0°, 15°, 30°, 45°$ durchgeführt worden[1]. Die unter Benutzung dieser Ergebnisse ermittelten Verschiebungen der Lastschwerpunkte gegenüber dem geraden Flügel sind in Tabelle 2 mit angegeben. Wir sehen, daß sich der Lastschwerpunkt mit wachsender Pfeilung für alle Zuspitzungen nach außen verschiebt, im Gegensatz zu den vorwärts gepfeilten Flügeln, bei denen er nach innen wandert, in bezug auf den ungepfeilten Flügel. Die Neutralpunktsverschiebung bei negativer Pfeilung ist ungefähr entgegengesetzt gleich dem Wert bei entsprechender positiver Pfeilung. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die infolge der Pfeilstellung erzeugte zusätzliche Auftriebsänderung bei Flügeln von entgegengesetzt gleicher Pfeilung nahezu entgegengesetzt gleich ist. In diese systematischen Untersuchungen ordnen sich die Ergebnisse früherer Messungen [2] recht gut ein.

b) Unsymmetrische Anströmung. Auftrieb: Der Auftriebsbeiwert c_a zeigt bei sämtlichen Flügeln im gesunden Strömungsbereich die bekannte Abhängigkeit vom Schiebewinkel β die nahezu proportional $\cos^2\beta$ ist.

Widerstand: Der Widerstandsbeiwert $c_{x\,sym}$ (in Richtung der x_e-Achse, parallel zur Symmetrieebene) ändert sich

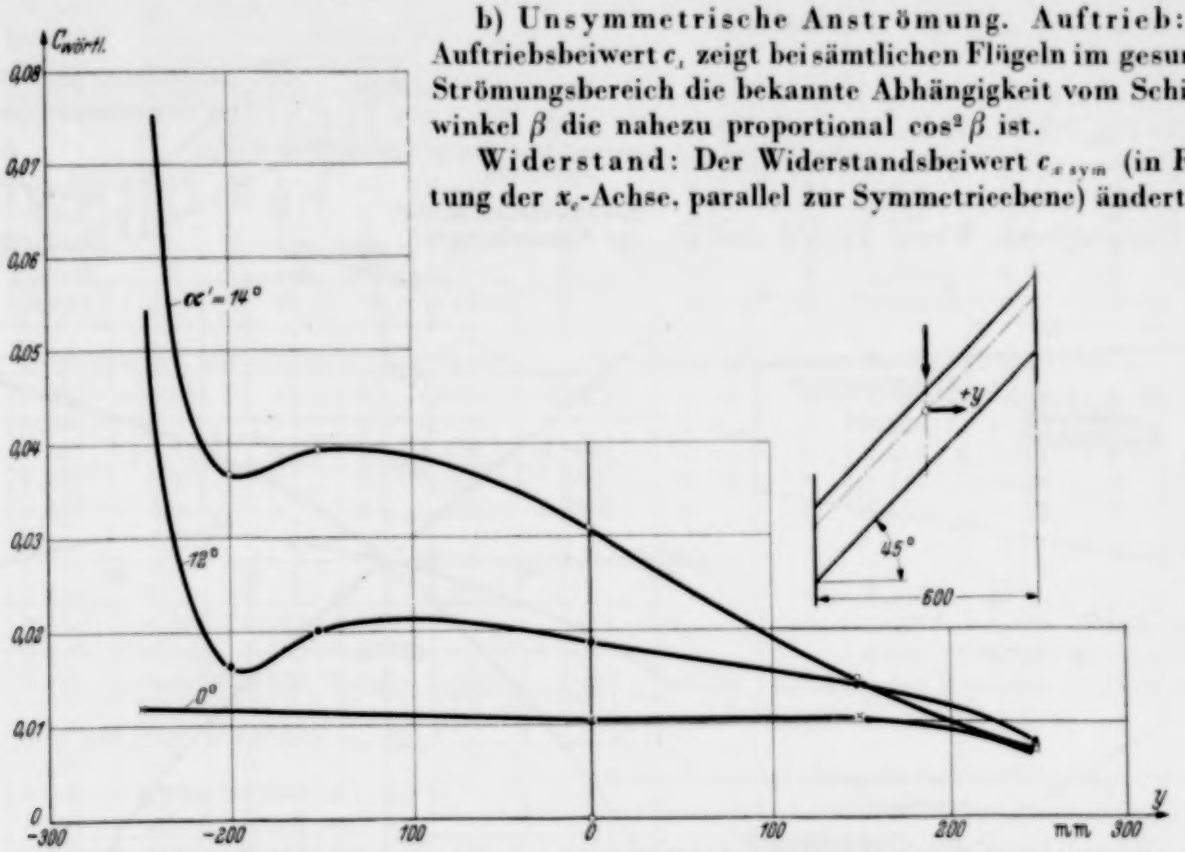


Abb. 7. Örtlicher Profilwiderstand längs Spannweite für einen Pfeilflügel ($\varphi = 45°$) mit Endscheiben und ohne Endscheiben bei verschiedenen Anstellwinkeln; $\varphi = 30°$; $\alpha_g = 0, 6, 12, 14$; Profil NACA 0012.

ebenfalls nach dem $\cos^2\beta$-Gesetz für die geraden und rückwärts gepfeilten Flügel, im Gegensatz zu den vorwärts gepfeilten Flügeln, die praktisch vom Schiebewinkel unabhängige Widerstände ergeben. Ausgenommen sind wiederum die höheren Anstellwinkel, bei denen Abreißerscheinungen auftreten.

Auftriebsanstieg: Der Auftriebsanstieg $\partial c_a/\partial\alpha$ unterliegt denselben Bedingungen wie der Auftrieb selbst, so daß auch hier das $\cos^2\beta$-Gesetz zutrifft.

Kippmoment: Das Kippmoment, bezogen auf den $l_n/4$-Punkt, zeigt kein ganz einheitliches Verhalten. Während im allgemeinen eine Zunahme mit dem Schiebewinkel β im normalen Anstellwinkelbereich festzustellen ist, also das Moment schwanzlastiger wird, bleibt bei dem vorwärts gepfeilten Flügel mit starker Zuspitzung 02/—30 das Moment für kleine Anstellwinkel konstant und wird für größere Anstellwinkel mit dem Schiebewinkel kleiner, also kopflastiger. Die Neutralpunktlage $\partial c_M/\partial c_a$ ist nahezu unabhängig von β.

Auf die Beiwerte der Seitenkraft (c_y) und die auf das experimentelle Achsensystem bezogenen Beiwerte des Rollmomentes (c_{Le}) und des Giermomentes (c_{Ne}) wollen wir im ein-

[1] *W. Jacobs*, Untersuchungen und Mitteilungen der D. V. L. Berlin-Adlershof, U. M. 2059 (1943). Bibliography of Technical Reports, Washington, P. B. 39 148.

[2] Vgl. *H. Blenck*, a. a. O.; ferner *W. Jacobs*, erscheint als zweiter Teil dieser Arbeit im Ing.-Archiv. — *E. Möller*, Luftfahrt-Forsch. 18 (1941), S. 243.

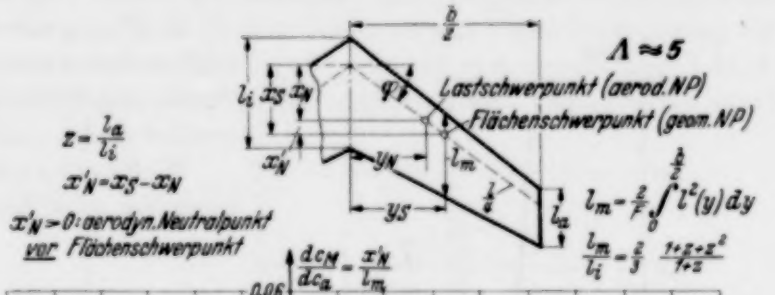
zelnen nicht eingehen, sondern nur die Stabilitätsbeiwerte genauer betrachten, da diese vor allem interessieren. Die Stabilitätsbeiwerte haben wir als den Mittelwert der Steigung in dem Bereich von $\beta = -10°$ bis $+10°$ gebildet. Die auf das experimentelle Achsensystem bezogenen Werte des Rollmomentes und Giermomentes sind auch noch umgerechnet worden auf das flugzeugfeste Achsensystem. Die Umrechnungsformeln lauten

$$c'_L = c'_{Le} \cos \alpha - c'_{Ne} \sin \alpha,$$
$$c'_N = c'_{Ne} \cos \alpha + c'_{Le} \sin \alpha.$$

Beide Werte sind enthalten in Tabelle 3.

1. Seitenkraft-Stabilitätsbeiwerte $\partial c_y/\partial\beta$. Die Seitenkraft-Stabilitätsbeiwerte $\partial c_y/\partial\beta$ zeigen in ihrer Abhängigkeit vom Anstellwinkel kein ganz klares Verhalten bei den verschiedenen Flügeln (Abb. 10). Die Werte sind jedoch sehr klein, und geringe Messungenauigkeiten können sich schon stark auswirken. Bei Annäherung an $c_{a\,max}$ findet ein Abknicken der Kurven statt.

2. Rollmoment-Stabilitätsbeiwerte $\partial c_{Le}/\partial\beta$. Die Rollmoment-Stabilitätsbeiwerte $\partial c_{Le}/\partial\beta$ in Abhängigkeit von c_a sind enthalten in Abb. 11. Auch die flugzeugfesten Werte $\partial c_L/\partial\beta$ sind



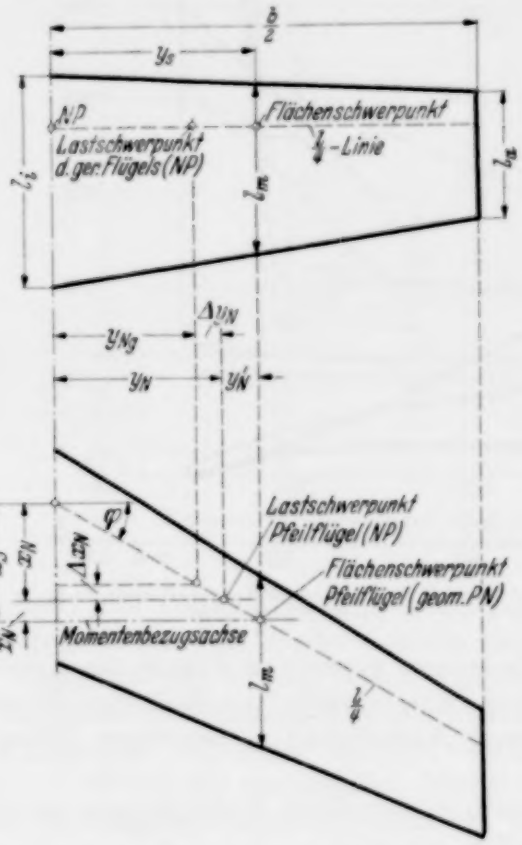


Abb. 8. Skizze zur Berechnung des Neutralpunktes und des Lastschwerpunktes am Pfeilflügel.

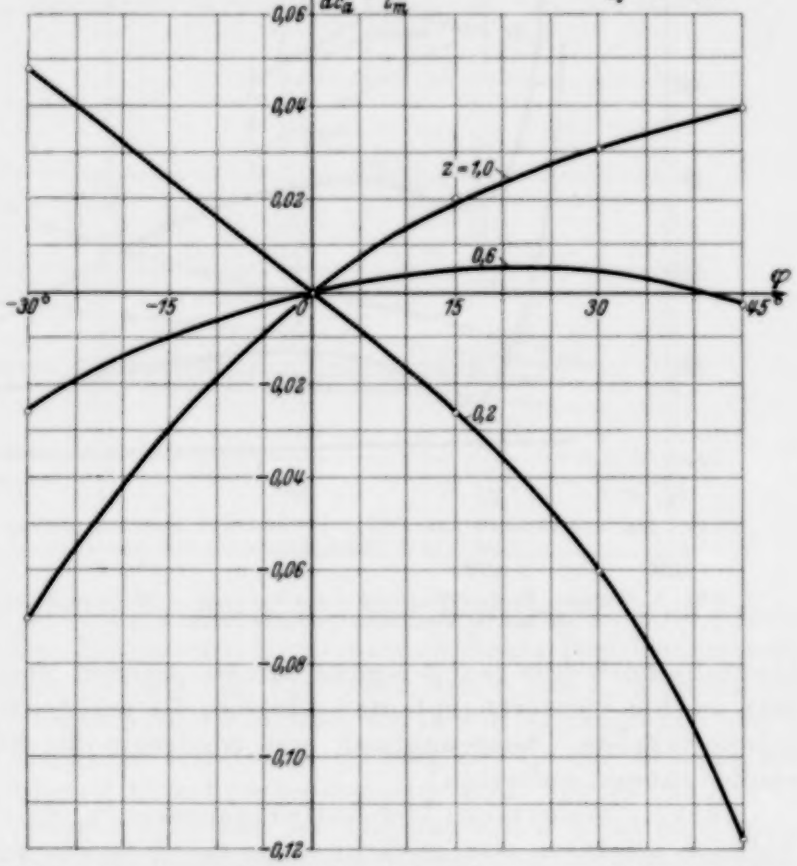


Abb. 9. Lage des aerodynamischen Neutralpunktes in Abhängigkeit von Pfeilwinkel φ und Zuspitzung Z.

aufgeführt (Abb. 12). Bei allen Flügeln ist ein nahezu lineares Verhalten über den Auftriebsbeiwert c_a festzustellen, ausgenommen das obere Gebiet, in dem Abreißerscheinungen auftreten. Mit wachsendem positiven Pfeilwinkel φ findet ebenfalls ein Anwachsen von $\partial c_{Le}/\partial\beta$ statt. Bei Übergang zu negativer Pfeilung kehrt das Schieberollmoment sein Vorzeichen um. Die geraden Flügel liefern schwach positive Werte bis auf den Flügel mit der Zuspitzung $Z = 0{,}2$, für den das Rollmoment im ganzen c_a-Bereich ungefähr Null ist.

Bildet man die zweiten Ableitungen $\partial^2 c_{Le}/\partial\beta\,\partial c_a$ und $\partial^2 c_L/\partial\beta\,\partial c_a$, so ergibt sich für jeden Flügel ein einziger fester Wert, durch den die Rollstabilität ausgedrückt wird. Diese Werte sind für sämtliche Flügel ermittelt worden. Sie sind in Abb. 16 und Tabelle 3 enthalten. Die Auf-

Tabelle 2. *Neutralpunktlagen. Vergleich von Messung und Theorie.*

$\varphi°$	Kraftmessung											
	$Z = 1$				$Z = 0{,}6$				$Z = 0{,}2$			
	$\frac{y_N}{b/2}$	$\frac{x'_N}{l_m}$	$\frac{\Delta x_N}{l_m}$	$\frac{\Delta y_N}{b/2}$	$\frac{y_N}{b/2}$	$\frac{x'_N}{l_m}$	$\frac{\Delta x_N}{l_m}$	$\frac{\Delta y_N}{b/2}$	$\frac{y_N}{b/2}$	$\frac{x'_N}{l_m}$	$\frac{\Delta x_N}{l_m}$	$\frac{\Delta y_N}{b/2}$
−30	0,439	−0,071	—	—	0,431	−0,026	—	—	0,423	+0,048	—	—
0	—	0	—	—	—	0	—	—	—	0	—	—
15	0,457	+0,020	—	—	—	—	—	—	0,430	−0,026	—	—
30	0,466	+0,031	—	—	—	—	—	—	0,434	−0,060	—	—
45	0,470	+0,040	—	—	0,450	−0,002	—	—	0,438	−0,118	—	—
Druckverteilungsmessung												
0	0,442	0	0	0								
15	0,450	0,025	0,006	0,008								
30	0,460	0,039	0,027	0,018								
45	0,473	0,035	0,078	0,031								
Rechnung mit konstanter $c_{a\ \ddot{o}rtl}$-Verteilung												
−30	0,500	0	0	0	0,458	0	0	0	0,389	0	0	0
0	0,500	0	0	0	0,458	0	0	0	0,389	0	0	0
15	0,500	0	0	0	0,458	0	0	0	0,389	0	0	0
30	0,500	0	0	0	0,548	0	0	0	0,389	0	0	0
45	0,500	0	0	0	0,458	0	0	0	0,389	0	0	0
Rechnung mit Mittelwert von konstanter $c_{a\ \ddot{o}rtl}$-Verteilung und elliptischer Auftriebsverteilung												
−30	0,465	−0,031	0	0	0,439	−0,013	0	0	0,410	+0,028	0	0
0	0,465	0	0	0	0,439	0	0	0	0,410	0	0	0
15	0,465	+0,015	0	0	0,439	0,006	0	0	0,410	−0,013	0	0
30	0,465	0,031	0	0	0,439	0,010	0	0	0,410	−0,028	0	0
45	0,465	0,065	0	0	0,439	0,020	0	0	0,410	−0,049	0	0
Rechnung nach *Multhopp*												
0	0,450	0	0	0	0,432	0	—	—	0,407	0	—	—
15	0,463	0,016	0,009	0,013	—	—	—	—	0,423	−0,021	0,0094	0,016
30	0,477	0,013	0,040	0,027	—	—	—	—	0,438	−0,066	0,0393	0,031
45	0,497	−0,029	0,122	0,047	0,470	−0,050	0,0950	0,038	0,449	−0,140	0,0922	0,042
Rechnung nach *Weissinger*												
0	0,438	0	0	0								
15	0 448	0,026	0,007	0 010								
30	0,457	0,044	0,028	0,019								
45	0,472	0,040	0,088	0,034								

x'_N = Rücklage des Neutralpunktes hinter dem Flügelschwerpunkt.
Δx_N = Neutralpunktsverschiebung des Pfeilflügelsinfolge Änderung der Auftriebsverteilung gegenüber dem Rechteckflügel (Abb. 8).

tragung $\partial^2 c_{Le}/\partial\beta\,\partial c_a$ über dem Pfeilwinkel φ für die verschiedenen Zuspitzungen ergibt eine recht gute lineare Abhängigkeit in dem gesamten Pfeilwinkelbereich von $\varphi = -30°$ bis $\varphi = +45°$. Die Kurven für die verschiedenen Zuspitzungen laufen nahezu parallel, so daß ihr Abstand voneinander ungefähr gleich der Differenz der Werte der geraden Flügel ist. Aus dieser Auftragung kann man jetzt die Stabilitätsbeiwerte sämtlicher anderen Flügel gleichen Seitenverhältnisses in dem praktisch nur vorkommenden Bereich $Z = 1{,}0$ bis 0,2 und $\varphi = -30°$ bis 45° entnehmen. Es sind in Abb. 16 zum Vergleich auch andere Messungen herangezogen worden[1]. Die Übereinstimmung ist größtenteils recht gut.

Um den Einfluß der Pfeilung allein auf das Rollmoment zu erfassen, wurden noch die Differenzen gebildet gegenüber dem geraden Flügel

$$\Delta\left(\frac{\partial^2 c_{Le}}{\partial\beta\,\partial c_a}\right)_{Pf.} \qquad \text{und} \qquad \Delta\left(\frac{\partial^2 c_L}{\partial\beta\,\partial c_a}\right)_{Pf.}$$

mit

$$\Delta\left(\frac{\partial^2 c_{Le}}{\partial\beta\,\partial c_a}\right)_{Pf.} = \left(\frac{\partial^2 c_{Le}}{\partial\beta\,\partial c_a}\right)_{Pf.} - \left(\frac{\partial^2 c_{Le}}{\partial\beta\,\partial c_a}\right)_{\varphi=0}.$$

[1] Vgl. *H. Blenk*, a. a. O., *E. Möller*, a. a. O., ferner *M. Hansen*, Forschungsbericht der Zentr. für wiss. Berichtswesen. Berlin-Adlershof, F. B. 1411 (1941). — *Th. Schwenk*, Forschungsbericht der Zentr. für wiss. Berichtswesen. Berlin-Adlershof, F. B. 1781 (1943).

Tabelle 3. *Zusätzliches Roll- und*

$\varphi°$	$Z = 1$				$Z = 0{,}6$	
	$\Delta\left(\frac{\partial^2 c_{Le}}{\partial\beta\,\partial c_a}\right)_{Pf.}$	$\Delta\left(\frac{\partial^2 c_{Ne}}{\partial\beta\,\partial c_a^2}\right)_{Pf.}$	$\Delta\left(\frac{\partial^2 c_L}{\partial\beta\,\partial c_a}\right)_{Pf.}$	$\Delta\left(\frac{\partial^2 c_N}{\partial\beta\,\partial c_a^2}\right)_{Pf.}$	$\Delta\left(\frac{\partial^2 c_{Le}}{\partial\beta\,\partial c_a}\right)_{Pf.}$	$\Delta\left(\frac{\partial^2 c_{Ne}}{\partial\beta\,\partial c_a^2}\right)_{Pf.}$
−30	−0,328	+0,072	−0,335	−0,043	−0,295	+0,071
+15	+0,130	−0,032	+0,135	0	—	—
30	0,300	−0,066	0,305	−0,001	—	—
45	0,490	−0,120	0,525	−0,028	+0,475	−0,117

Wie Abb. 16 zeigt, ergeben sich für diesen zusätzlichen Pfeileffekt bei allen Flügeln gleicher Pfeilung ungefähr dieselben Werte. Es sind also nur geringe Abhängigkeiten von der Zuspitzung

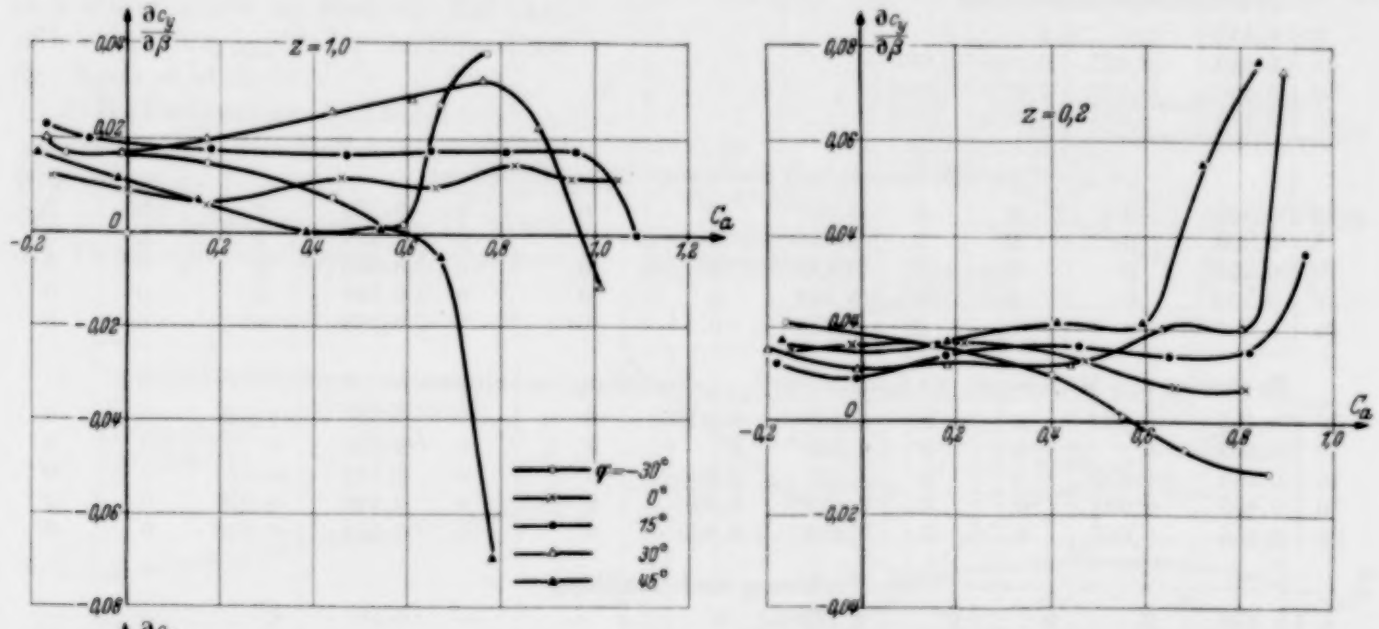


Abb. 10. Seitenkraftanstieg $\partial c_y/\partial\beta$ in Abhängigkeit von c_a.

des Flügels festzustellen. Die Werte für den Flügel mit starker Zuspitzung liegen etwas unter den Werten der anderen Flügel.

Da bisher zu wenig systematische Messungen vorliegen, läßt sich nicht genau nachprüfen, ob dies auch für andere Seitenverhältnisse zutreffen wird. Vermutlich wird dies aber der Fall sein. Man braucht dann bei einem bestimmten Seitenverhältnis den Pfeileffekt nur für einen Pfeilwinkel zu bestimmen und hat dann infolge der linearen Abhängigkeit von φ die Werte für sämtliche anderen Pfeilungen des betreffenden Flügels und näherungsweise auch für sämtliche Zuspitzungen mit dem betreffenden Seitenverhältnis.

3. Giermoment-Stabilitätsbeiwert

$\partial c_{Ne}/\partial\beta$. Die Giermoment-Stabilitätsbeiwerte $\partial c_{Ne}/\partial\beta$ und $\partial c_N/\partial\beta$ sind enthalten in Abb. 13, 14, 15. Das Schiebe Giermoment ergibt sich nach der Theorie und auch nach der Messung dem Quadrat des Auftriebs proportional. Wir bilden daher die zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 c_{Ne}}{\partial\beta\,\partial c_a^2}, \qquad \frac{\partial^2 c_N}{\partial\beta\,\partial c_a^2} \quad \text{und} \quad \Delta\left(\frac{\partial^2 c_{Ne}}{\partial\beta\,\partial c_a^2}\right)_{Pf.}, \qquad \Delta\left(\frac{\partial^2 c_N}{\partial\beta\,\partial c_a^2}\right)_{Pf.}$$

Diese Werte sind angegeben in Abb. 17 und Tabelle 3.

Die Schiebe-Giermomente sind verhältnismäßig klein. Für positive Pfeilwinkel und für kleine negative Pfeilwinkel bis ungefähr $\varphi = -15°$ sind die Werte negativ, bei noch größeren negativen

Giermoment durch Peilstellung.

$Z = 0{,}6$		$Z = 0.2$			
$\Delta\left(\frac{\partial^2 c_L}{\partial\beta\,\partial c_a}\right)_{Pf.}$	$\Delta\left(\frac{\partial^2 c_N}{\partial\beta\,\partial c_a^2}\right)_{Pf.}$	$\Delta\left(\frac{\partial^2 c_{Le}}{\partial\beta\,\partial c_a}\right)_{Pf.}$	$\Delta\left(\frac{\partial^2 c_{Ne}}{\partial\beta\,\partial c_a^2}\right)_{Pf.}$	$\Delta\left(\frac{\partial^2 c_L}{\partial\beta\,\partial c_a}\right)_{Pf.}$	$\Delta\left(\frac{\partial^2 c_N}{\partial\beta\,\partial c_a^2}\right)_{Pf.}$
—0,295	—0,004	—0,300	+0,059	—0,300	+0,004
—	—	+0,110	—0,017	+0,110	0,019
—	—	0,240	—0,052	0,242	0,022
+0,460	+0,020	0,400	—0,082	0,401	0,036

Pfeilungen werden sie positiv. Die Abhängigkeit vom Pfeilwinkel ist wie beim Rollmoment linear. Die Kurven für gleiches φ verschieben sich ungefähr parallel zu positiven Werten mit wachsender Zuspitzung. Der reine Pfeileinfluß $\Delta(\partial^2 c_{Ne}/\partial\beta\;\partial c_a^2)_{Pf.}$ ist jedoch nur schwach von der Zuspitzung abhängig (Abb. 17). Auch für das Giermoment liefert der Vergleich mit anderen Messungen recht gute Übereinstimmung.

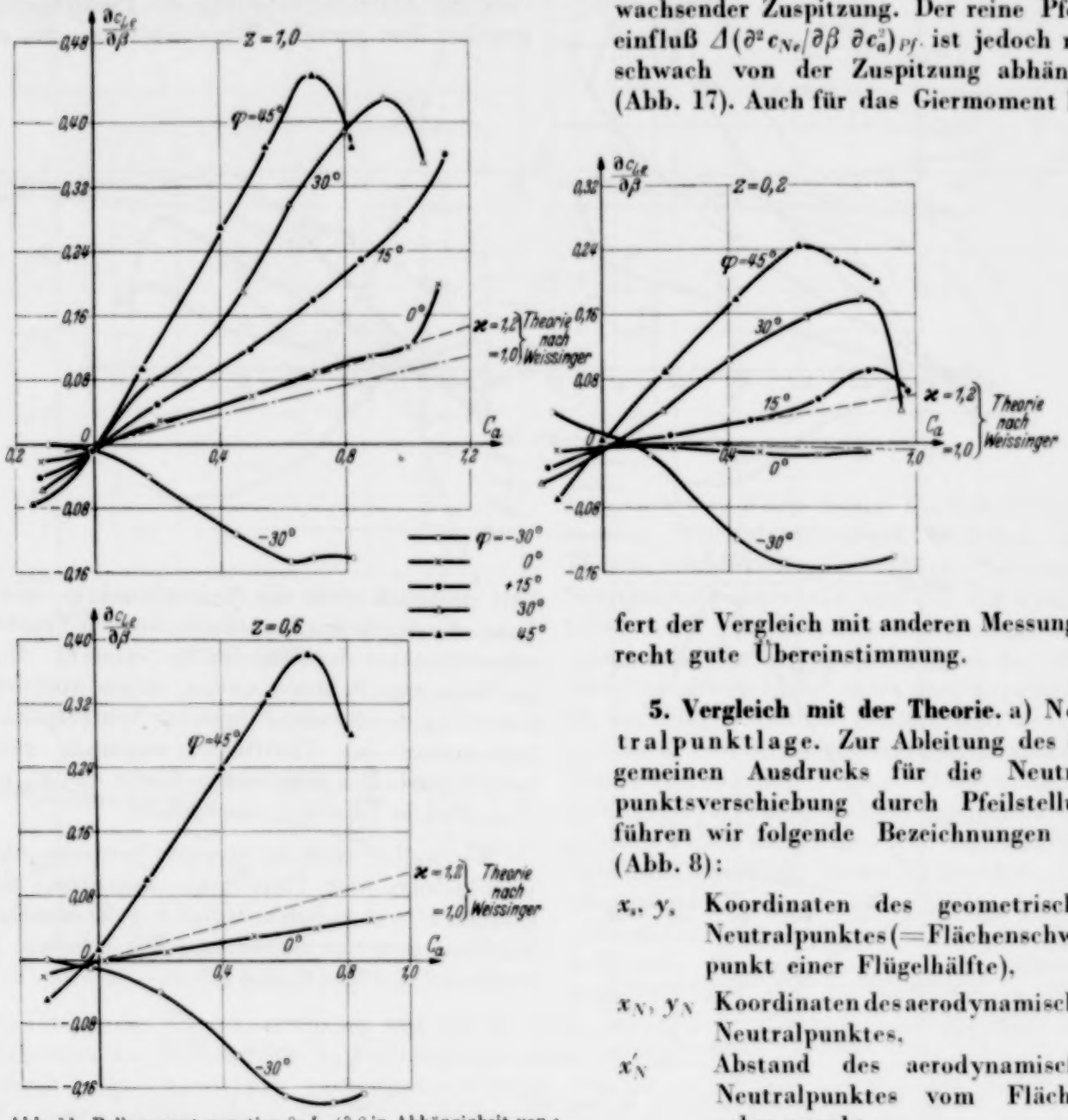


Abb. 11. Rollmomentenanstieg $\partial c\, L_e/\partial\beta$ in Abhängigkeit von c_a.

5. Vergleich mit der Theorie. a) Neutralpunktlage. Zur Ableitung des allgemeinen Ausdrucks für die Neutralpunktsverschiebung durch Pfeilstellung führen wir folgende Bezeichnungen ein (Abb. 8):

x_s, y_s Koordinaten des geometrischen Neutralpunktes (= Flächenschwerpunkt einer Flügelhälfte),

x_N, y_N Koordinaten des aerodynamischen Neutralpunktes,

x'_N Abstand des aerodynamischen Neutralpunktes vom Flächenschwerpunkt,

Δx_N Neutralpunktverschiebung des Pfeilflügels infolge Änderung der Auftriebsverteilung gegenüber dem geraden Flügel.

Es gelten dann nach Abb. 8 die Beziehungen

$$y_N = y_{Ng} + \Delta y_N,$$
$$x_N = y_N \operatorname{tg}\varphi = y_s \operatorname{tg}\varphi - x'_N = y_{Ng} \operatorname{tg}\varphi + \Delta x_N. \qquad (1)$$

Weiter folgt

$$x'_N = (y_s - y_N) \operatorname{tg}\varphi = (y_s - y_{Ng} - \Delta y_N) \operatorname{tg}\varphi \qquad (2)$$

und

$$\Delta x_N = \Delta y_N \operatorname{tg} \varphi . \tag{3}$$

In dimensionsloser Schreibweise ist dann

$$\frac{x'_N}{l_m} = \left(\frac{y_s}{b/2} - \frac{y_N}{b/2} \right) \operatorname{tg} \varphi \, \frac{b}{2 l_m}, \tag{4}$$

$$\frac{\Delta x_N}{l_m} = \frac{\Delta y_N}{b/2} \, \frac{b}{2 l_m} \operatorname{tg} \varphi . \tag{5}$$

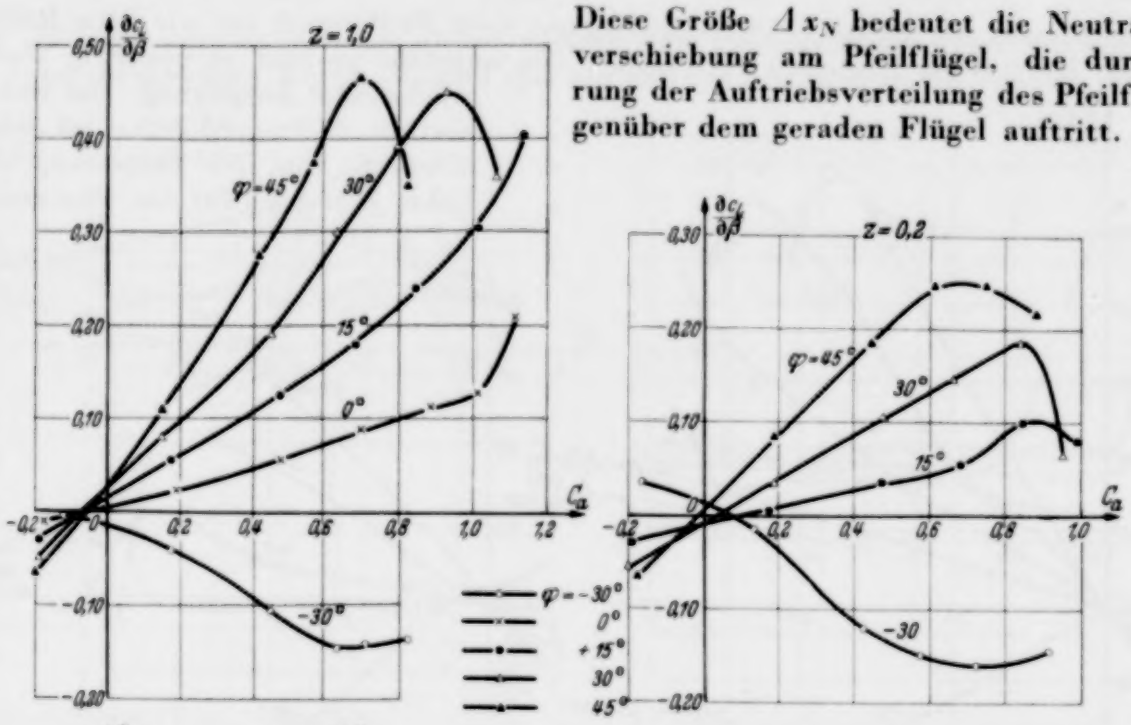


Abb. 12. Rollmomentenanstieg $\partial c_L / \partial \beta$ in Abhängigkeit von c_a.

Diese Größe Δx_N bedeutet die Neutralpunktsverschiebung am Pfeilflügel, die durch Änderung der Auftriebsverteilung des Pfeilflügels gegenüber dem geraden Flügel auftritt. Sie enthält demnach nicht die Neutralpunktsverschiebung, die durch das Zurückschieben des Flächenschwerpunktes der Flügelhälfte entsteht. Hieraus kann man Schlüsse ziehen, ob die Auftriebsverteilung des geraden Flügels zur Neutralpunktsberechnung des Pfeilflügels zugrunde gelegt werden darf. Die gemessenen Werte von x'_N und Δx_N sind in Tabelle 2 angegeben.

Wir wollen noch die gesamte Neutralpunktsverschiebung des Pfeilflügels gegenüber dem geraden Flügel angeben, wobei wir die einzelnen Einflüsse getrennt aufführen. Wir erhalten sofort aus (1), (2), (3) und (5)

$$\frac{x_N}{l_m} = \frac{y_N}{b/2} \frac{b}{2 l_m} \operatorname{tg} \varphi , \tag{6}$$

$$\frac{x_N}{l_m} = \underbrace{\left(\frac{y_s}{b/2} \right)}_{①} + \underbrace{\frac{y_{N_g} - y}{b/2}}_{②} + \underbrace{\frac{y_N - y_{N_g}}{b/2}}_{③} \frac{b}{2 l_m} \operatorname{tg} \varphi . \tag{6a}$$

In dieser Gleichung stellt der erste Term die Verschiebung des Flächenschwerpunktes infolge Pfeilgebung dar, was gleichbedeutend ist mit der Neutralpunktsverschiebung des Pfeilflügels gegenüber dem geraden Flügel bei konstanter $c_{a\,örtl}$-Verteilung längs Spannweite. Der zweite Term umfaßt die Abweichung der Auftriebsverteilung des geraden Flügels von der konstanten $c_{a\,örtl}$-Verteilung, während der dritte die Abweichung der Auftriebsverteilung des Pfeilflügels von der des geraden Flügels enthält.

Zum Vergleich mit den Messungen wollen wir die aus einigen theoretischen Auftriebsverteilungen ermittelten Lagen der Neutralpunkte und der Lastschwerpunkte angeben. Wir legen folgende Auftriebsverteilungen zugrunde:

1. Konstante $c_{a\,örtl}$-Verteilung längs Spannweite. Der Lastschwerpunkt ist hierbei identisch mit dem Flächenschwerpunkt einer Flügelhälfte auf der $l/4$-Linie; dies liefert den $l_m/4$-Punkt.
2. Mittelwert der Auftriebsverteilung aus konstanter $c_{a\,örtl}$-Verteilung und elliptischer Auftriebsverteilung.
3. Auftriebsverteilung nach *Multhopp*[1] für gerade und gepfeilte Flügel.
4. Auftriebsverteilung nach *Weissinger*[2] für gerade und gepfeilte Flügel konstanter Tiefe.

Den Vergleich dieser theoretischen Ergebnisse mit den Messungen enthält Tabelle 2. Es zeigt sich hierbei, daß für den Flügel konstanter Tiefe, also $Z = 1$, die Theorie von *Weissinger* die genauesten Werte liefert. Die Unterschiede in den Neutralpunktslagen zwischen der Theorie von *Weissinger* und den Messungen bewegen sich innerhalb von 1% der Flügeltiefe. Auch der Mittelwert zwischen konstanter $c_{a\,örtl}$-Verteilung und elliptischer Auftriebsverteilung liefert recht gute Ergebnisse bei den Flügeln mit der Zuspitzung $Z = 1$; es tritt in der Neutralpunktlage ein maximaler Fehler von ungefähr 2% auf. Diese Genauigkeit dürfte für Überschlagsrechnungen in den meisten Fällen ausreichen. Die Methode von *Multhopp* ergibt für kleine Pfeilwinkel noch brauchbare Werte für den Neutralpunkt, während für größere φ zu große Abweichungen auftreten. Für die Lage des Lastschwerpunktes liefert also die Methode von *Weissinger* die beste Übereinstimmung mit der Messung, ebenfalls für die Lastverteilung längs der Spannweite, wie frühere Druckverteilungsmessungen zeigen[3].

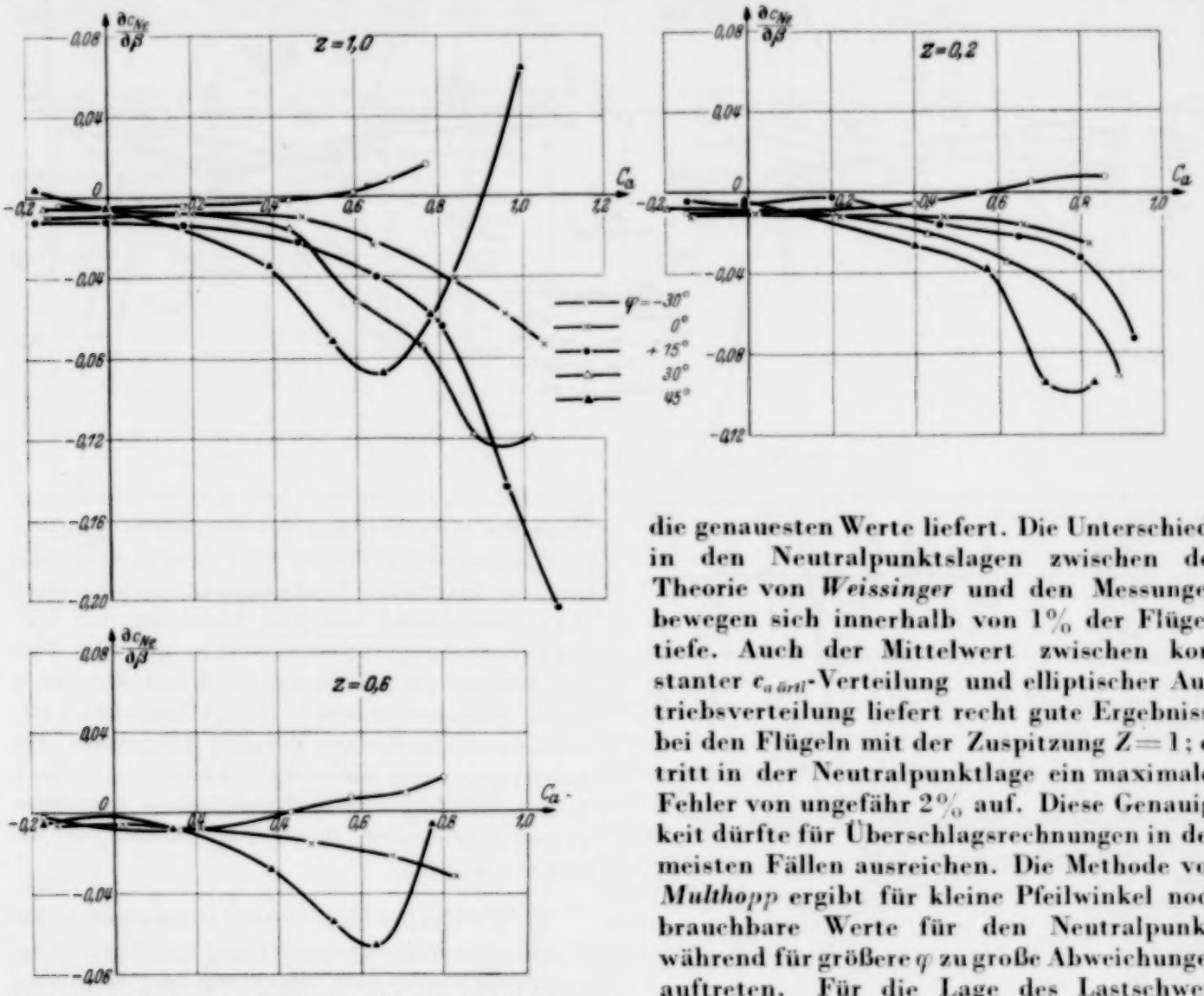


Abb. 13. Giermomentenanstieg $\partial c_{Ne}/\partial\beta$ in Abhängigkeit von c_a.

Zum Vergleich mit den zugespitzten Flügeln $Z = 0{,}6$; 0,2 haben wir von den Auftriebsverteilungen nur die Fälle 1, 2 und 3 herangezogen. Es zeigt sich, daß hiervon die oben geforderte Genauigkeit nach der Methode von *Multhopp* nur für kleine Pfeilwinkel erreicht wird. Die Berechnung der Auftriebsverteilung für gepfeilte Trapezflügel nach *Weissinger* ist nicht durch-

[1] *H. Multhopp*, Luftfahrt-Forsch. 15 (1938), S. 153; sowie *H. Multhopp*, Die Anwendung der Tragflügeltheorie auf Fragen der Flugmechanik bei unsymmetrischer Anströmung. Bericht S. 2 der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung (1939), S. 53.

[2] *J. Weissinger*, Forschungsbericht der Zentr. für wiss. Berichtswesen. Berlin-Adlershof, F. B. 1553 (1942). Enthalten in *J. Weissinger*, Math. Nachr. 2 (1949), S. 45.

[3] *W. Jacobs*. Erscheint als zweiter Teil dieser Arbeit im Ing.-Archiv.

geführt worden. Es ist zu erwarten, daß auch für zugespitzte Flügel diese Methode die besten Werte liefert. Bemerkenswert ist noch, daß bei der Zuspitzung $Z = 0{,}6$ die konstante $c_{a\,örtl}$-Verteilung recht gut mit der Messung übereinstimmt. Für $Z = 1$ ergeben sich hiernach jedoch zu große Werte für die Neutralpunktlage und für $Z = 0{,}2$ zu kleine. Dies bedeutet, daß die wirkliche Lastverteilung gegenüber der bei konst. $c_{a\,örtl}$-Verteilung für $Z = 1$ weiter nach innen und für $Z = 0{,}2$ weiter nach außen verlagert ist. Systematische Druckverteilungsmessungen, die genaue Aussagen über die Auftriebsverteilung an zugespitzten Flügeln geben könnten, liegen bisher nicht vor. Es ist hier nur die Messung von *Schwenk*[1] an einem gepfeilten Trapezflügel

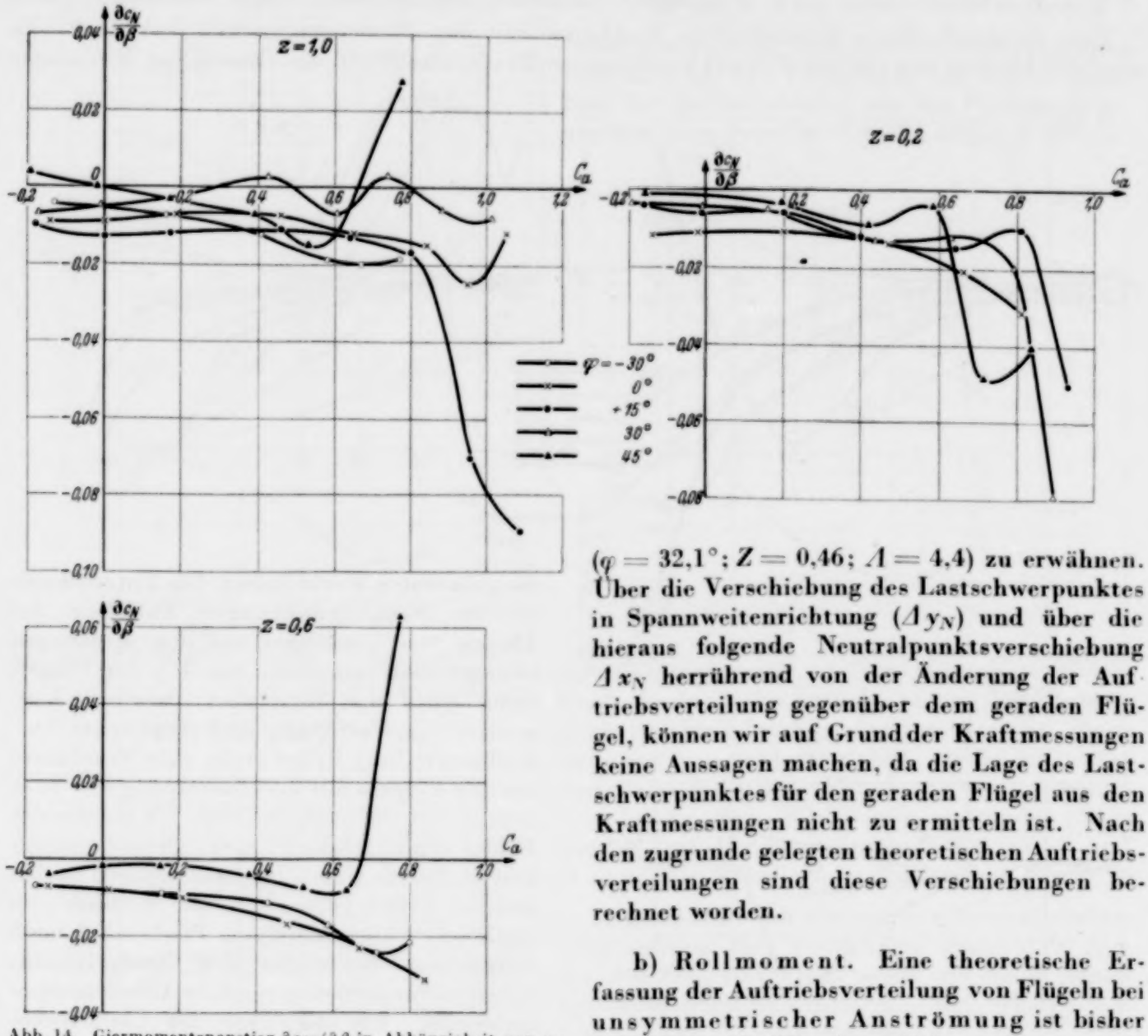


Abb. 14. Giermomentenanstieg $\partial c_N/\partial \beta$ in Abhängigkeit von c_a.

($\varphi = 32{,}1°$; $Z = 0{,}46$; $\Lambda = 4{,}4$) zu erwähnen. Über die Verschiebung des Lastschwerpunktes in Spannweitenrichtung (Δy_N) und über die hieraus folgende Neutralpunktsverschiebung Δx_N herrührend von der Änderung der Auftriebsverteilung gegenüber dem geraden Flügel, können wir auf Grund der Kraftmessungen keine Aussagen machen, da die Lage des Lastschwerpunktes für den geraden Flügel aus den Kraftmessungen nicht zu ermitteln ist. Nach den zugrunde gelegten theoretischen Auftriebsverteilungen sind diese Verschiebungen berechnet worden.

b) Rollmoment. Eine theoretische Erfassung der Auftriebsverteilung von Flügeln bei unsymmetrischer Anströmung ist bisher nur für gerade Flügel möglich, und zwar nach einem Verfahren von *Weissinger*[2]. Es ergibt sich hiernach für die Schiebe-Rollmomente von geraden Trapezflügeln die Beziehung

$$c_{Le} = \left[\frac{2\varkappa}{\Lambda} \frac{1 + 0{,}15\left(\frac{1}{Z} - 1\right)}{\frac{1}{Z} + 1} - 0{,}10 \right] \beta c_a + c_{Le\,0}\,; \tag{7}$$

dabei bedeutet $c_{Le\,0}$ das bei $c_a = 0$ bereits vorhandene Moment, und $\varkappa$ stellt einen empirischen Faktor dar, der zwischen 1 und 1,5 liegt. Für die Ableitung folgt

[1] *Th. Schwenk*, a. a. O.
[2] *J. Weissinger*, Jahrbuch 1940 der deutschen Luftfahrtforschung, S. I 145.

$$\frac{\partial^2 c_{Le}}{\partial \beta \, \partial c_a} = \frac{2\varkappa}{A} \frac{1 + 0{,}15\left(\frac{1}{Z} - 1\right)}{\frac{1}{Z} + 1} - 0{,}10. \tag{7a}$$

Nach Messungen von *Bussmann* und *Kopfermann*[1] ergab sich die beste Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung für $\varkappa = 1{,}2$. Wir wollen die Werte für $\varkappa = 1$ und 1,2 bestimmen. Die Gegenüberstellung mit der Messung enthält folgende Tabelle:

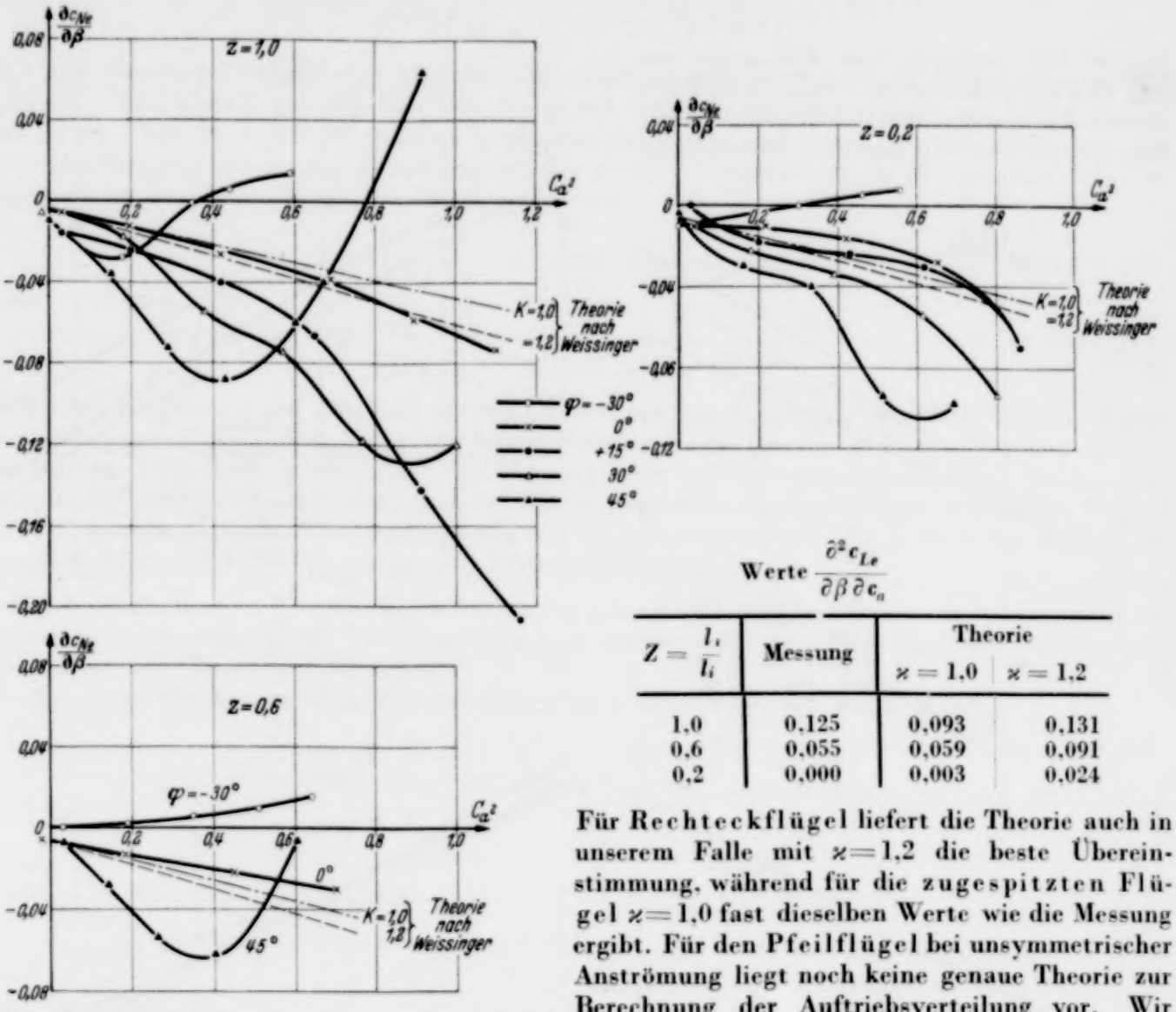


Abb. 15. Giermomentenanstieg $\partial c_{Ne}/\partial\beta$ in Abhängigkeit von c_a^2.

Werte $\frac{\partial^2 c_{Le}}{\partial \beta \, \partial c_a}$

$Z = \frac{l_s}{l_i}$	Messung	Theorie $\varkappa = 1{,}0$	Theorie $\varkappa = 1{,}2$
1,0	0,125	0,093	0,131
0,6	0,055	0,059	0,091
0,2	0,000	0,003	0,024

Für Rechteckflügel liefert die Theorie auch in unserem Falle mit $\varkappa = 1{,}2$ die beste Übereinstimmung, während für die zugespitzten Flügel $\varkappa = 1{,}0$ fast dieselben Werte wie die Messung ergibt. Für den Pfeilflügel bei unsymmetrischer Anströmung liegt noch keine genaue Theorie zur Berechnung der Auftriebsverteilung vor. Wir können hierbei nur Näherungslösungen zum Vergleich mit den Messungen heranziehen, und zwar eine grobe Näherung von *Betz*[2] und eine weitere von *Weissinger*[3].

Wir folgen zunächst den Betrachtungen von *Betz* zur Ableitung der Näherungsformel. Setzen wir den Auftrieb eines schräg angeblasenen geraden Flügels näherungsweise proportional $\cos^2\beta$ und betrachten wir die beiden Hälften eines Pfeilflügels unabhängig voneinander fliegend, so betragen ihre Auftriebsbeiwerte

$$c_a \cos^2(\beta \mp \varphi) = c_a (\cos\beta \cos\varphi \pm \sin\beta \sin\varphi)^2,$$

wobei das obere Vorzeichen für die vorgehende und das unter für die zurückgehende Flügelhälfte gilt. Als Differenz der beiden Flügelhälften ergibt sich

$$\Delta c_a = 2\, c_a \cos\beta \cos\varphi \sin\beta \sin\varphi = c_a \frac{\sin 2\beta \sin 2\varphi}{2}.$$

[1] *K. Bussmann* und *K. Kopfermann*, Techn. Berichte 11 (1944).
[2] *A. Betz*, Applied airfoil theory. Durand Aerodynamic Theory. Berlin 1935. Bd. IV.
[3] *J. Weissinger:* Math. Nachr. 2 (1949) S. 45.

Nimmt man an, daß der Angriffspunkt dieses zusätzlichen Auftriebes im Abstand $b/4$ von der Mitte liegt, so erhalten wir für das Schieberollmoment des Pfeilflügels

$$(\Delta c_{Le})_{Pf.} = c_a \frac{\sin 2\beta \sin 2\varphi}{4}$$

oder für die Ableitungen, wenn wir in β linearisieren,

$$\Delta\left(\frac{\partial c_{Le}}{\partial \beta}\right)_{Pf.} = c_a \frac{\sin 2\varphi}{2}, \qquad \Delta\left(\frac{\partial^2 c_{Le}}{\partial \beta\, \partial c_a}\right)_{Pf.} = \frac{\sin 2\varphi}{2}. \tag{8}$$

Neuere Überlegungen von *Weissinger* zeigen, daß ein grundlegender Unterschied zwischen einem geraden und einem pfeilförmigen Flügel beim Schieben besteht. Hiernach ändert sich bei einem schiebenden Pfeilflügel der Auftrieb auf beiden Flügelhälften nur um $\cos(\beta - \varphi)$ bzw. $\cos(\beta + \varphi)$, so daß sich die Beziehung ergibt

$$(\Delta c_{Le})_{Pf.} = \frac{c_a}{2} \sin\varphi \sin\beta$$

oder

$$\Delta\left(\frac{\partial c_{Le}}{\partial \beta}\right)_{Pf.} = c_a \frac{\sin\varphi}{2}, \qquad \Delta\left(\frac{\partial^2 c_{Le}}{\partial \beta\, \partial c_a}\right)_{Pf.} = \frac{\sin\varphi}{2}. \tag{9}$$

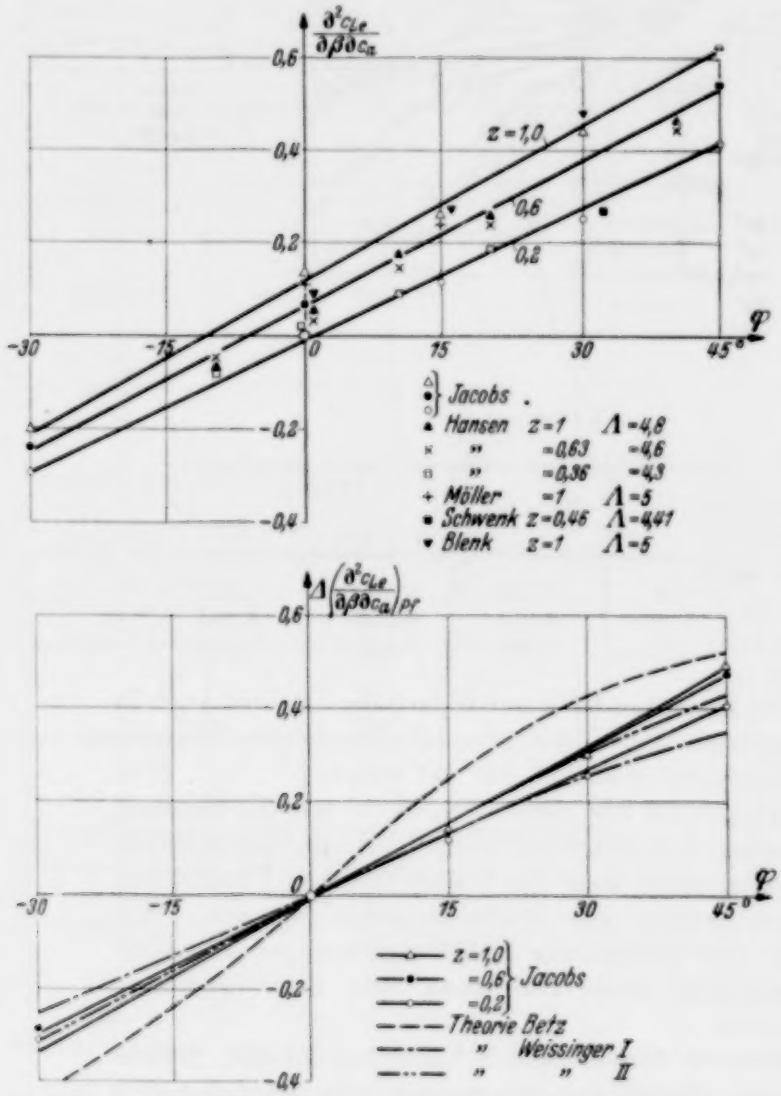


Abb. 16. $\partial^2 c_{Le}/\partial\beta\,\partial c_a$ und $\Delta(\partial^2 c_{Le}/\partial\beta\,\partial c_a)_{Pf.}$ in Abhängigkeit von Pfeilung und Zuspitzung.

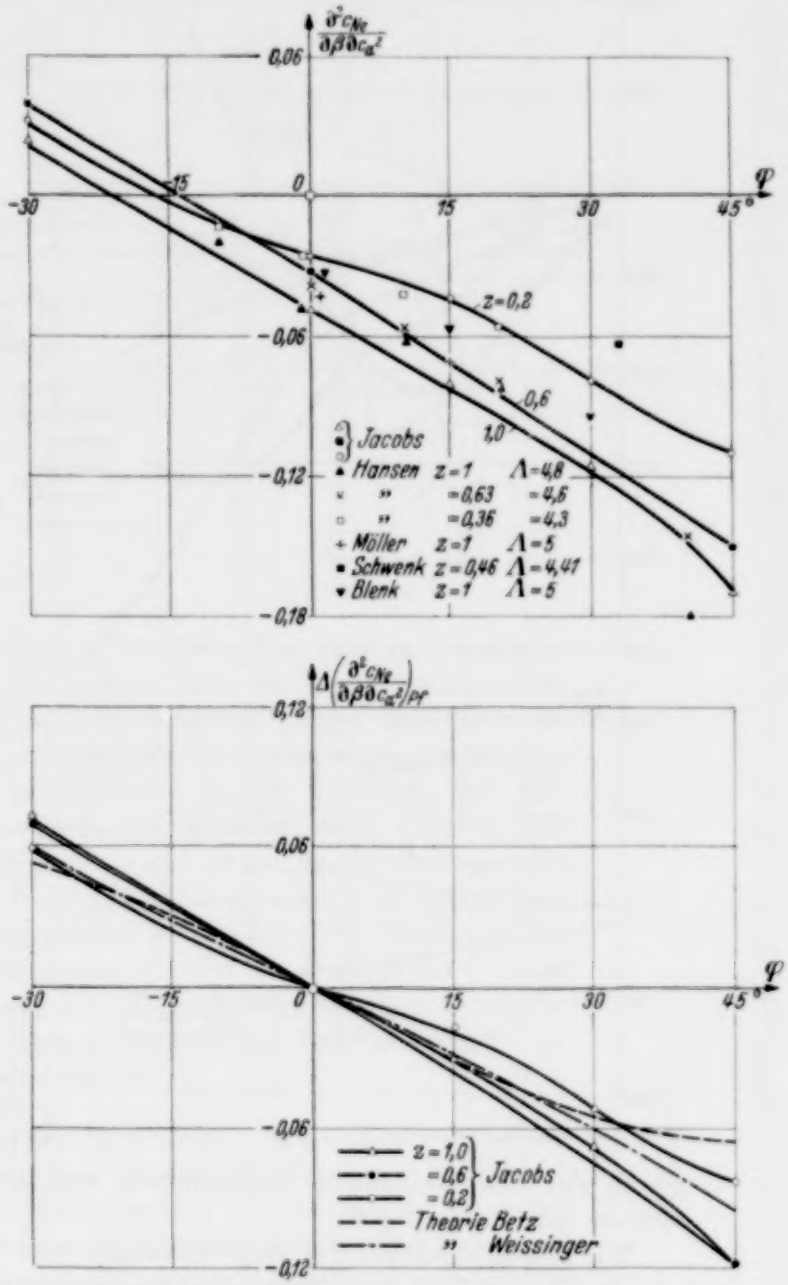


Abb. 17. $\partial^2 c_{Ne}/\partial\beta\,\partial c_a^2$ und $\Delta(\partial^2 c_{Ne}/\partial\beta\,\partial c_a^2)_{Pf.}$ in Abhängigkeit von Pfeilung und Zuspitzung

Berücksichtigt man weiterhin beim Schieben den Einfluß der Schrägstellung des freien Wirbel-Bandes, so ergibt sich nach *Multhopp*[1] eine zusätzliche Anstellwinkelverteilung $\Delta\alpha = \pm\,\alpha_i\,\beta\,\mathrm{tg}\,\varphi$, wobei α_i die induzierte Anstellwinkelverteilung bei Geradanblasung bedeutet. Das positive Vorzeichen ist für die voreilende, das negative für die nacheilende Flügelhälfte zu nehmen. Mit dieser Anstellwinkelverteilung müßte jetzt die Auftriebsverteilung und daraus das Rollmoment berechnet werden. *Weissinger* leitet eine Näherungslösung bei elliptischer Auftriebsverteilung ab. In diesem Fall ergibt sich α_i und somit auch der Betrag α längs der Spannweite als konstant:

$$\alpha_i = \frac{c_a}{\pi\,\Lambda}, \qquad \Delta\alpha = \pm\frac{c_a}{\pi\,\Lambda}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\varphi\,.$$

Die Auftriebsverteilung für eine Anstellwinkelverteilung mit Sprungstelle in Flügelmitte verhält sich über den Halbflügel ungefähr wie die gewöhnliche Auftriebsverteilung am Flügel halber Streckung. Mit Hilfe der elliptischen Umrechnungsformeln und mit $c'_{a\,\infty} = 2\,\pi$ erhält man bei Berücksichtigung der obigen Beziehung für das gerade Wirbelsystem für das gesamte Schiebe-rollmoment eines Pfeilflügels die Näherungsformel

$$\Delta\left(\frac{\partial\,c_{Le}}{\partial\beta}\right)_{Pf.} = c_a\left(0{,}5 + \frac{1}{\Lambda+4}\right)\sin\varphi \tag{10}$$

oder

$$\Delta\left(\frac{\partial^2 c_{Le}}{\partial\beta\,\partial c_a}\right)_{Pf.} = \left(0{,}5 + \frac{1}{\Lambda+4}\right)\sin\varphi\,. \tag{10a}$$

Während die Formel von *Betz* und die erste Näherung von *Weissinger* unabhängig vom Seitenverhältnis des Flügels sind, liefert die letzte Beziehung eine geringe Abhängigkeit vom Seitenverhältnis. Dies trifft ja auch nach der Messung recht gut zu, wie schon erwähnt wurde. Der Vergleich dieser Näherungsformeln mit der Messung auf Abb. 16 zeigt, daß die verbesserte Formel von *Weissinger* die beste Übereinstimmung mit der Messung ergibt. Die Formel von *Betz* liefert zu große absolute Werte in dem ganzen Pfeilwinkelbereich.

c) Giermoment. Für das Giermoment des geraden Flügels können wir wieder genauere theoretische Formeln nach *Weissinger* angeben, während für den Pfeilflügel nur Näherungen nach *Betz* und *Weissinger* vorliegen.

Es gelten für den geraden Trapezflügel nach *Weissinger* die Formeln

$$c_{Ne} = -\left[\frac{2\,\varkappa}{\Lambda}\,\frac{1+0{,}15\left(\frac{1}{Z}-1\right)}{\frac{1}{Z}+1} + 0{,}084\,\frac{\Lambda\left(1+\frac{1}{Z}\right)}{\Lambda+2} - 0{,}10\right]\beta\alpha c_a + c_{Ne\,0} \tag{11}$$

oder

$$\frac{\partial^2 c_{Ne}}{\partial\beta\,\partial c_a^2} = -\left[\frac{2\,\varkappa}{\Lambda}\,\frac{1+0{,}15\left(\frac{1}{Z}-1\right)}{\frac{1}{Z}+1} + 0{,}084\,\frac{\Lambda\left(1+\sqrt{\frac{1}{Z}}\right)}{\Lambda+2} - 0{,}10\right]\frac{1}{c_a}. \tag{12}$$

Für den Vergleich mit der Messung setzen wir wieder $\varkappa = 1{,}0$ und $1{,}2$.

Werte $\dfrac{\partial^2 c_{Ne}}{\partial\beta\,\partial c_a^2}$

$Z = \frac{l_a}{l_i}$	Messung	Theorie	
		$\varkappa = 1{,}0$	$\varkappa = 1{,}2$
1,0	—0,050	—0,056	—0,0665
0,6	—0,033	—0,052	—0,0605
0,2	—0,028	—0,053	—0,058

Beim Rechteckflügel ergibt sich jetzt für $\varkappa = 1$ eine recht gute Übereinstimmung mit der Messung. Bei stärker werdender Zuspitzung nehmen nach der Messung die Absolutwerte ab, nach der Theorie bleiben sie jedoch praktisch konstant. Die theoretischen Werte für $\varkappa = 1{,}2$ liegen ungünstiger als die für $\varkappa = 1{,}0$.

[1] *H. Multhopp*, Die Anwendung der Tragflügeltheorie auf Fragen der Flugmechanik bei unsymmetrischer Anströmung. Bericht S. 2 der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung (1939), S. 53.

Das Schiebe-Giermoment eines Pfeilflügels rührt her von der Änderung des induzierten Widerstandes und von der Änderung des Profilwiderstandes der beiden Flügelhälften. Nach *Betz* erhält man für den Pfeileinfluß die Näherungsformel

$$(\Delta c_{Ne})_{Pf.} = -\left[\frac{c_a^2 \sin 2\beta \sin 2\varphi}{2\pi\Lambda} + c_{w_p} \sin\beta \sin\varphi\right]$$

oder für den Giermomentenanstieg bei Linearisierung in β:

$$\Delta\left(\frac{\partial c_{Ne}}{\partial\beta}\right)_{Pf.} = -\left[\frac{c_a^2 \sin 2\varphi}{\pi\Lambda} + c_{w_p} \sin\varphi\right], \tag{13}$$

$$\Delta\left(\frac{\partial^2 c_{Ne}}{\partial\beta\,\partial c_a^2}\right)_{Pf.} = -\frac{\sin 2\varphi}{\pi\Lambda}. \tag{13a}$$

Die entsprechenden Beziehungen von *Weissinger* lauten

$$\Delta\left(\frac{\partial c_{Ne}}{\partial\beta}\right)_{Pf.} = -\left[\frac{0{,}5}{\cos\varphi} - \frac{1}{\Lambda+4}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{2}{\Lambda+2} - 1\right)\right] \operatorname{tg}\varphi\, \frac{c_a^2}{c_a'},$$

$$\Delta\left(\frac{\partial^2 c_{Ne}}{\partial\beta\,\partial c_a^2}\right)_{Pf.} = -\left[\frac{0{,}5}{\cos\varphi} - \frac{1}{\Lambda+4}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{2\Lambda}{\Lambda+2} - 1\right)\right]\frac{\operatorname{tg}\varphi}{c_a'}$$

oder linearisiert nach φ

$$\Delta\left(\frac{\partial^2 c_{Ne}}{\partial\beta\,\partial c_a^2}\right)_{Pf.} = -\left[0{,}5 - \frac{\Lambda-2}{(\Lambda+4)(\Lambda+2)}\right]\frac{\varphi}{c_a'}. \tag{14}$$

Während die unter groben Annahmen abgeleitete Formel von *Betz* nur bis ungefähr $\varphi = \pm 30°$ einigermaßen mit der Messung übereinstimmt, liefert die Formel von *Weissinger* eine recht gute Übereinstimmung in dem ganzen Pfeilwinkelbereich (Abb. 17).

6. Zusammenfassung.

Es wird über Drei- und Sechskomponentenmessungen an Pfeilflügeln berichtet. Die Systematik umfaßt die Klasse der trapezförmigen Flügel mit den Zuspitzungen $Z = l_a/l_i = 1{,}0;\ 0{,}6;\ 0{,}2$ und den Pfeilungen $\varphi = -30°,\ 0°,\ +15°,\ 30°$ und $45°$. Es ergeben sich übersichtliche Abhängigkeiten des Schiebe-Rollmomentes und des Schiebe-Giermomentes von der Pfeilung und der Zuspitzung des Flügels. Vergleiche dieser Werte mit theoretischen Näherungen zeigen gute Übereinstimmung.

Eingegangen am 25. April (1950.)

Anschrift des Verfassers: *Dr. habil. W. Jacobs*, Stockholm, (Schweden), Flygtekniska försöksanstalten, Ulvsunda.

Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften

Herausgegeben von

Professor Dr. **S. Flügge** und Professor Dr. **F. Trendelenburg**
Marburg a. d. Lahn — Freiburg i. Br.

Unter Mitwirkung von

Professor Dr. **W. Bothe** Heidelberg
Professor Dr. **F. Hund** Jena
Professor Dr. **P. Harteck** Hamburg

Vor kurzem erschien:

Dreiundzwanzigster Band

Mit 215 Abbildungen. III, 416 Seiten. 1950. DMark 59.60

Inhaltsübersicht:

Die Sonnenkorona. Von H. Siedentopf, Tübingen. — **Experimentelle Schwingungsanalyse.** Von W. Meyer-Eppler, Bonn a. Rh. — **Schallreflexion, Schallbrechung und Schallbeugung.** Von A. Schoch, Göttingen. — **Seignetteelektrizität.** Von H. Baumgartner, Zürich, F. Jona, Zürich und W. Känzig, Zürich. — **Theorie der Supraleitung.** Von H. Koppe, Göttingen. — **Röntgenspektroskopie der Valenzelektronenbänder in Kristallen.** Von H. Niehrs, Berlin. Inhalt der Bände XI—XXIII. — Namen- und Sachverzeichnis.

Außerdem liegen vor:

Zweiundzwanzigster Band

Mit 195 Abbildungen. III, 332 Seiten. 1949. DMark 48.—

Inhaltsübersicht:

Transurane. Von S. Flügge, Marburg-Lahn. — **Die Elektronenschleuder.** Von H. Kopfermann, Göttingen. — **Die Entwicklung der Elektronenlawine in den Funkenkanal.** Von H. Raether, Sceaux (Seine). — **Molekulare Schallabsorption und -dispersion.** Von H. O. Kneser, Göttingen. — **Röntgenbestimmungen der Atomanordnung in flüssigen und amorphen Stoffen.** Von R. Glocker, Stuttgart. — **Ursprung und Eigenschaften der kosmischen Strahlung.** Von E. Bagge, Hamburg. — **Ionosphäre.** Von J. Zenneck, Althegnenberg (Obb.). — Inhalt der Bände I—XXII. — Namen- und Sachverzeichnis.

Einundzwanzigster Band

Mit 188 Abbildungen. III, 361 Seiten. 1945. DMark 48.—

Inhaltsverzeichnis:

Neuere Fortschritte der Theorie des inneren Aufbaues und der Entwicklung der Sterne. Von L. Biermann, Berlin-Babelsberg. — **Elektrische Leitfähigkeit der Metalle bei tiefen Temperaturen.** Von E. Grüneisen, Marburg a. d. Lahn. — **Supraleitfähigkeit.** Von E. Justi, Berlin und K. H. Koch, Wien. — **Anregungsstufen der leichten Atomkerne.** Von H. Volz, Erlangen. — **Die elektronenmikroskopische Untersuchung von Oberflächen.** Von H. Mahl, Berlin-Reinickendorf. — **Die Messung mechanischer und akustischer Widerstände.** Von K. Schuster, Breslau.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

In Kürze erscheint:

Praktische Funktionenlehre

Von Professor Dr.-Ing. **Friedrich Tölke**
Karlsruhe

Erster Band:

Elementare und elementare transzendente Funktionen

Zweite, stark erweiterte Auflage

Mit 178 Abbildungen und 50 durchgerechneten Beispielen. XI. 440 Seiten. 1950.
Ganzleinen DMark 39.—

Inhaltsübersicht:

I. Abschnitt: Definierende Differential- und Integralgleichungen, Fundamentaleigenschaften und gegenseitige Beziehungen der elementaren und elementaren transzendenten Funktionen. — II. Abschnitt: Durch elementare und elementare transzendente Funktionen ausdrückbare Integrale. — III. Abschnitt: Funktionentafeln der elementaren Transzendenten. — IV. Abschnitt: Anwendungen im Bereich der partiellen Differential- und Integralgleichungen. — V. Abschnitt: Summierung von Reihenentwicklungen. — VI. Abschnitt: Tafel der zonalen Kugelfunktion sowie ihrer Abteilungen und Integrale.

Auf zahlreichen Gebieten der Technik zeigt sich ein immer fühlbarer werdendes Bedürfnis nach einer breit angelegten Darstellung der Praktischen Funktionslehre. Bei der Inangriffnahme neuer Probleme ist man heute gezwungen, sich mit der Lösung von Integralen, Differential- und Integralgleichungen zu befassen, die längst technisches Allgemeingut sein könnten. Um diese Verhältnisse zu bessern, hat sich der Verfasser entschlossen, ein den heutigen technischen Bedürfnissen angepaßtes mehrbändiges Lehr- und Nachschlagebuch der Praktischen Funktionslehre zu schaffen. Die vorliegende, zweite Auflage des I. Bandes bringt eine Erweiterung um rund 180 Seiten. Über den in der ersten Auflage behandelten Stoff hinaus enthält sie völlig neu die Abschnitte IV, V und VI (siehe oben Inhaltsübersicht) und wird daher auch viele Benutzer der ersten Auflage interessieren.

In Vorbereitung befinden sich:

II. Bd. Theta-Funktionen und elliptische Funktionen.

III. Bd. Hypergeometrische Funktionen und Zylinderfunktionen.

Ferner liegen vor:

Mechanik deformierbarer Körper

Von Professor Dr.-Ing. habil. **Friedrich Tölke**
Karlsruhe

Erster Band: **Der punktförmige Körper**

Mit 339 Abbildungen. VIII, 388 Seiten. 1949. Ganzleinen DMark 45.—

Inhaltsübersicht:

I. Abschnitt: 1. Der geradlinig, bewegte, punktförmig idealisierte Körper. — II. Abschnitt: **Der beliebig bewegte, punktförmig idealisierte Körper.** — 2. Vektorielle, geometrische und kinematische Grundlagen. — 3. Mechanische Grundlagen. — 4. Bewegungen in zentralen Potentialfeldern. — 5. Mechanik der Raum- und Relativbewegungen. — III. Abschnitt: **Der punktförmig idealisierte Körperhaufen.** — 6. Massenmittelpunkt des Haufensystems. — 7. Mechanik des Haufensystems. — 8. Die gekoppelten harmonischen Schwingungen in Verbindung mit erzwungenen Schwingungen. — 9. Die gedämpften Schwingungen.

In dem vorliegenden ersten Band ist, neben dem Einbau zahlreicher mathematischer Grundlagen für die folgenden Bände, größter Wert auf eine möglichst weitgehende Behandlung der Elemente der Schwingungslehre gelegt worden. 55 vollständig durchgerechnete Beispiele aus zahlreichen Gebieten der Technik lassen anschaulich erkennen, wie viele technische Probleme bereits mit den Methoden der Punktmechanik einer vollständigen Lösung entgegengeführt werden können. Auch die mathematisch schwierigen Kapitel sind durch Beispiele erläutert. Dort, wo wie im Falle der Schwingungen mit quadratischer Dämpfung keine geschlossenen Lösungen gegeben werden konnten, sind die Ergebnisse in einer Reihe von Zahlentafeln niedergelegt worden, die eine unmittelbare Lösung technischer Aufgaben erlauben.

In Anpassung an die Ausweitung der dynamischen und thermischen Beanspruchungen von Konstruktionsteilen und an die Entwicklung der hydrodynamischen Grenzgebiete, insbesondere auf dem Gebiete der Stoßerscheinungen und Schwingungen, ist die folgende Gliederung des Werkes geplant:

Band I: Der punktförmige Körper. — Band II: Der statisch beanspruchte feste Körper. — Band III: Der dynamisch beanspruchte feste Körper. — Band IV: Der thermisch beanspruchte feste Körper. — Band V: Flüssigkeiten und Gase.

Veröffentlichungen zur Erforschung der Druckstoßprobleme

in Wasserkraftanlagen und Rohrleitungen

Herausgegeben von

Professor Dr.-Ing. **Friedrich Tölke**
Karlsruhe

Erstes Heft

Mit 135 Abbildungen. IV, 137 Seiten. DMark 24.—

Inhaltsverzeichnis:

Zur Normung der allgemeinen Druckstoß-Formelzeichen. Von P. Böss, Karlsruhe. — Ursachen von Druckstößen in den Druckrohrleitungen von Wasserkraftwerken. Von Arthur Hruschka, Wien. — Über den Bruch der Rohrleitung Zasip. — Von R. Thomann, Graz. — Über den Druckstoß in einsträngigen Rohrleitungen. Von F. Tölke, Berlin-Charlottenburg. — Druckstoßmessungen im Baukraftwerk der Badenwerk A. G. Von W. Leitner, Karlsruhe. — Die Regelvorgänge in langen hydraulischen Leitungen. Von W. Wiederbold, Hildesheim, und A. Geromiller, Magdeburg.

Der Deutsche Druckstoß-Ausschuß (German Water Hammer Committee) hat sich die Erforschung der zahlreichen noch ungeklärten Druckstoßprobleme in Wasserwerks- und Wasserkraftanlagen, in Rohrleitungen, Armaturen und hydraulisch betätigten Maschinen zur Aufgabe gesetzt. Er will ferner die ihm zugänglichen oder bekannt werdenden Betriebserfahrungen und Schadensfälle sammeln, um zu sicheren Voraussetzungen für die Grundannahmen der praktischen Druckstoßberechnung zu gelangen.

Das vorliegende Heft soll mithelfen, die Schäden, die erkannt und noch mehr unerkannt Tag für Tag durch Druckstöße ausgelöst werden, herabzusetzen.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

(57 273/4022) Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany. K.B./Z. 040.